Resolución Aux #13

$\boxed{P1}$ a) $(1-i)^4(1+i)^4 = [(1-i)(1+i)]^4$

$$= [1^2 + \cancel{i} - \cancel{i} - i^2]^4$$

$$= [1 - i^2]^4$$

$$= [1 - (-1)]^4$$

$$= 2^4$$

$$= 16$$

b) $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}} = \dfrac{((1-i)^2)^8 (1-i)}{1+i^{16}\cdot i}$

$i^{16} = 1$

$$= \frac{(\cancel{1^2} - 2i + \cancel{i^2})^8 (1-i)}{1+i}$$

$$= \frac{(-2i)^8 (1-i)}{(1+i)}$$

$$= \frac{2^8 i^8 (1-i)}{(1+i)}$$

$i^8 = 1$

$$= \frac{2^8 (1-i)}{(1+i)}$$

continuación

$$\Rightarrow \frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}} = \frac{2^8\,((1-i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}$$

$$= \frac{2^8\,(1-i)^2}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{2^8\,(-2i)}{\cancel{2}}$$

$$= -2^8\,i$$

c) $$1+i+\frac{i-1}{(i-1)^2+i} = 1+i+\frac{i-1}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}^{\,2}+i}$$

$$= 1+i+\frac{i-1}{\sqrt{2}^{\,2}+i}$$

$$= 1+i+\frac{i-1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$= 1+i+\frac{2i-i^2-2+i}{4-i^2}$$

$$= 1+i+\frac{3i-1}{5}$$

PROARTE®

Continuación

$$\Rightarrow 1+i+\frac{i-1}{|i-1|^2+i} = 1+i+\frac{3i-1}{5}$$

$$= \frac{5+5i+3i-1}{5}$$

$$= \frac{4+8i}{5}$$

$$= \frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$$

$\boxed{P2}$ pdq $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\overline{z}$ es automorfismo

Notemos que debemos probar que $f(z)=\overline{z}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$

<u>Morfismo</u>: sea $z_1=a+bi\in\mathbb{C}$ y $z_2=c+di\in\mathbb{C}$, con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ arbitrarios

$$\Rightarrow f(z_1+z_2)=f((a+bi)+(c+di))=f((a+c)+(b+d)i)$$

$$=(a+c)-(b+d)i$$

$$=a-bi+c-di$$

$$=f(z_1)+f(z_2)$$

$$f(z_1 \cdot z_2) = f((a+bi)(c+di)) = f((ac-bd)+(bc+ad)i)$$
$$= ac-bd-(bc+ad)i$$
$$= ac-bd-bci-adi$$

por otro lado

$$f(z_1)\cdot f(z_2) = (a-bi)(c-di)$$
$$= ac-adi-bci+bdi^2$$
$$= ac-adi-bci-bd$$
$$= ac-bd-adi-bci$$

Luego $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2)$

Finalmente, sea $1+0i = 1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(1) = f(1+0i) = 1-0i = 1$

$\therefore$ f es morfismo de $(\mathbb{C},+,\cdot)$ en $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Inyectiva: Sea $z_1 = a+bi \in \mathbb{C}$ y $z_2 = c+di \in \mathbb{C}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ~~tq~~

$$f(z_1) = f(z_2)$$

$$\Rightarrow a - bi = c - di$$

$$\Rightarrow a = c \wedge -b = -d$$

Re(a−bi) = Re(c−di) ∧ Im(a−bi) = Im(c−di)

$$\Rightarrow a = c \wedge b = d$$

$$\Rightarrow a+bi = c+di$$

$$(\Leftrightarrow) \quad z_1 = z_2$$

$\therefore$ f es inyectiva

Epiyectiva: Sea $z = x+yi \in \mathbb{C}$ arbitrario, $x,y \in \mathbb{R}$

Me basta con tomar $w = x - yi \in \mathbb{C}$ ya que

$$f(w) = f(x-yi) = x-(-y)i$$
$$= x+yi$$
$$= z$$

$\therefore$ f es epiyectiva

$\Rightarrow$ f es morfismo biyectivo de $(\mathbb{C},+,\cdot)$ en $(\mathbb{C},+,\cdot)$

$\Rightarrow$ f es automorfismo

$\boxed{P3}$ Determinar $a,b \in \mathbb{R}$ tq

$\boxed{Ec\ 1}$ $$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1+i$$

Resolvamos la ecuación, encontremos una expresión distinta para $\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \left(\frac{a-ib}{a-ib}\right) + \frac{2}{a-ib}\left(\frac{a+ib}{a+ib}\right)$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} + \frac{2a+2ib}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{3a+ib}{a^2+b^2}$$

$\Rightarrow$ volviendo a $\boxed{Ec\ 1}$

$$\frac{3a+ib}{a^2+b^2} = 1+i$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2} = 1+i$$

Continuación P3

$\Rightarrow$ (1) $\dfrac{3a}{a^2+b^2} = 1 \quad \wedge \quad$ (2) $\dfrac{b}{a^2+b^2} = 1 \qquad$ con $a^2+b^2 \neq 0$

$\Rightarrow \quad 3a = a^2 + b^2 \quad \wedge \quad b = a^2+b^2$

igualando $\Rightarrow \quad 3a = b$

Luego reemplazando en (1)

$$\Rightarrow \frac{3a}{a^2+(3a)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 3a = a^2 + 9a^2$$

$$\Rightarrow 3a = 10a^2$$

$$\Rightarrow 10a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(10a-3) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = \frac{3}{10}$$

Si $a = 0 \Rightarrow \dfrac{3a}{a^2+b^2} = \dfrac{0}{b^2} = 0 \neq 1$

Luego $a = \dfrac{3}{10}$ y $b = \dfrac{9}{10}$

$\boxed{P4}$ Sea $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| > 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$

pdq $\mathrm{Im}(z + \frac{1}{z}) > 0$

Dem: Sea $z = x + yi$ tq $\sqrt{x^2+y^2} > 1 \wedge \mathrm{Im}(z) = y > 0$

$$\Rightarrow z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2+y^2}$$

$$= x + \frac{x}{x^2+y^2} + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(z + \tfrac{1}{z}) = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = y\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right)$$

Donde tenemos por hipotesis que

1) $y > 0$

2) $\sqrt{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2+y^2 > 1$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(z + \tfrac{1}{z}) = \underbrace{y}_{>0}\left(\frac{\overbrace{x^2+y^2-1}^{>0}}{\underbrace{x^2+y^2}_{>0}}\right) > 0 \quad \blacksquare$$

¡CADA FACTOR ES POSITIVO!