MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 13: Complejos

22 de junio de 2017

- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones, donde $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo
  1. $(0, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, +)$
  2. $(1, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, \cdot)$
  3. El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$.
  4. El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ de $(a, b) \neq (0, 0)$ es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
- La unidad imaginaria es el complejo (0,1). Se anotará como i. Se cumple que $i^2 = -1$
- **Forma cartesiana:** La expresión $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma cartesiana* del complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.
- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:

$$\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = a \qquad \mathbb{I}\mathrm{m}(z) = b$$

- $\mathbb{R}\mathrm{e}(\cdot)$ y $\mathbb{I}\mathrm{m}(\cdot)$ son morfismos de $(\mathbb{C}, +)$ en $(\mathbb{C}, +)$, es decir, son endomorfismos. Por lo tanto cumplen que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
  1. $\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1 + z_2) = \mathbb{R}\mathrm{e}(z_1) + \mathbb{R}\mathrm{e}(z_2)$.
  2. $\mathbb{I}\mathrm{m}(z_1 + z_2) = \mathbb{I}\mathrm{m}(z_1) + \mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)$.
- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda z) = \lambda \mathbb{R}\mathrm{e}(z)$.
  2. $\mathbb{I}\mathrm{m}(\lambda z) = \lambda \mathbb{I}\mathrm{m}(z)$.
  3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1) = \mathbb{R}\mathrm{e}(z_2) \wedge \mathbb{I}\mathrm{m}(z_1) = \mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)]$

<u>**Antes de comenzar**</u>**:** Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, en virtud del teorema de pitagoras se define la distancia de z hasta el origen como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Además se define para $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = \begin{cases} +1 & si \quad n \equiv_4 0 \\ +i & si \quad n \equiv_4 1 \\ -1 & si \quad n \equiv_4 2 \\ -i & si \quad n \equiv_4 3 \end{cases}$$

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1 - i)^4 (1 + i)^4$ *b)* $\dfrac{(1 - i)^{17}}{1 + i^{17}}$ *c)* $1 + i + \dfrac{i - 1}{|i - 1|^2 + i}$

P2. [**Morfismos**] Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define el conjugado de un complejo como $\overline{z} = a - bi$. Se define $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \overline{z}$. Demuestre que f es automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

<u>*Recuerdo*</u>: Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ dos anillos con unidad. $f : A \to B$ es un morfismo de anillos si $\forall x, y \in A$:

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad \wedge \quad f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y) \quad \wedge \quad f(1_A) = 1_B$$

P3. [**Control 5 - P1 - 2011**] Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá **Ideal** de A si y sólo si:

(i) $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$.

(ii) $(\forall\, a \in A)\, (\forall\, b \in I)\; a \cdot b \in I \;\wedge\; b \cdot a \in I$.

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, \oplus, \odot)$ un morfismo de anillos. Demuestre que la preimagen $F^{-1}(\{0_B\})$ es un Ideal de A, donde $0_B \in B$ es el neutro para $\oplus$ en B.

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I un ideal de A.

1) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$

2) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$ en A, entonces $I = A$

P4. [**Ecuación con Complejos**] Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1 + i$$

P5. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1 \;\wedge\; \mathbb{I}\mathrm{m}(z) > 0$. Demuestre que

$$\mathbb{I}\mathrm{m}(z + \frac{1}{z}) > 0$$

Problemas Propuestos

P6. Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que existen $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ que verifican $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$. Demuestre que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $MN = p^2 + q^2$. En otras palabras, piden probar que si dos enteros se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, entonces su producto también.
Hint: Le puede ser útil trabajar la siguiente expresión $|(a + ib)(c + id)|^2$.

P7. [**Control 3 - P1(a) - año 2003**]
Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces pruebe que

$$|z + i| = |z - i| \iff z \in \mathbb{R}$$

P8. [**Control Recuperativo - P2(i) - año 2000**]
Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0$. Mostrar que todas las soluciones de $|z| = |z - \varepsilon|$ pertenecen a una misma recta del plano complejo.

P9. [**Control Recuperativo - P1(i) - año 2001**]
Muestre que el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z - \mathbb{R}\mathrm{e}(z)| = (\mathbb{I}\mathrm{m}(z))^2$, es la unión de tres rectas paralelas del plano complejo (dibújelas).

P10. [**Control Recuperativo - P2(2) - año 2003**]
Demuestre que si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| < 1$, entonces

$$\mathbb{R}\mathrm{e}(\frac{1+z}{1-z}) > 0$$