

Resolución Aux Extra C6

PL Sea $(G, *)$ grupo tal que $|G|$ es finito

a) pda: si $\exists x \in G \setminus \{e\} : x = x^{-1} \Rightarrow |G|$ es par

En efecto, podemos notar que el cto

$H = \{e, x\}$ es subgrupo de G .

ya que 1) $H \neq \emptyset$ pues $e \in H$ y $x \in H$

2) $H \subseteq G$ ya que $e \in H$ y $e \in G$
 $x \in H$ y por hipótesis $x \in G$

3) H cumple que es grupo ya que

- Existe neutro $\rightarrow e$
- es asociativo $\rightarrow$ por herencia de $(G, *)$
- Todos sus elementos son invertibles en H

$$e^{-1} = e, \quad x^{-1} = x$$

o bien basta notar la sgte tabla

$*$	e	x
e	e	x
x	x	e

} Cumple con todo para ser grupo

$\Rightarrow H = \{e, x\}$ es subgrupo de G

$\Rightarrow$ por teo de LAGRANGE

" $|H|$ divide a $|G|$ ", pero $H = \{e, x\}$
tiene dos elementos $\Rightarrow |H| = 2$

Luego, se tiene que 2 divide a $|G|$

$\therefore |G|$ es par

b) $|G| = 4$. Encontrar todos los subgrupos de $(G, *)$

Por Lagrange, los subgrupos deben tener orden
1, 2 o 4 ya que tienen que dividir a $|G| = 4$

$\Rightarrow$

Subgrupos de orden 1: el único grupo de orden 1
es $\{e\}$

Subgrupos de orden 4: el único grupo de orden 4
es el mismo G

Subgrupos de orden 2: aca es lo interesante

podemos suponer que $G = \{e, a, b, c\}$

Los candidatos a ser subgrupos de orden 2 son

$\{e, a\}$, $\{e, b\}$ y $\{e, c\}$

ya que siempre debe estar el neutro en un grupo

Notemos que en virtud de la parte anterior

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } a = a^{-1} \Rightarrow \{e, a\} \text{ es grupo} \\ \text{si } b = b^{-1} \Rightarrow \{e, b\} \text{ es grupo} \\ \text{si } c = c^{-1} \Rightarrow \{e, c\} \text{ es grupo} \end{array} \right.$

¿Esto puede ocurrir?

Veamos la tabla de G imponiendo (*)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			e

→
sudoku

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

y nos dio una
tabla de un
grupo!

Luego lo de
(*) si puede
ocurrir

$\therefore \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$ son subgrupos de $(G, *)$

$\Rightarrow$ En total tengo 5 subgrupos

Q2 a) ~~por~~ $H \cap K$ es subgrupo si H y K lo son

En efecto, por caracterización notemos que

i) $H \cap K \neq \emptyset$ pues $e \in H \cap K$

ii) $H \cap K \subseteq G$ ya que $H \cap K \subseteq H$ y $H \subseteq G$

iii) ~~por~~ $\forall x, y \in H \cap K \quad x * y^{-1} \in H \cap K$

En efecto, sea $x, y \in H \cap K$ arbitrarios

$\Rightarrow$ (1) $x, y \in H \Rightarrow x^{-1}, y^{-1} \in H$ pues H es grupo

(2) $\wedge x, y \in K \Rightarrow x^{-1}, y^{-1} \in K$ pues K es grupo

por (1) Luego como $x \in H \wedge y^{-1} \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H$

por (2) Análogamente como $x \in K \wedge y^{-1} \in K \Rightarrow x * y^{-1} \in K$

} son grupos

$\Rightarrow$ Como $x * y^{-1} \in H \wedge x * y^{-1} \in K \Rightarrow x * y^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K$ es subgrupo de $(G, *)$

b) H, K subgrupos de G con $|H| = 38$ y $|K| = 55$

por $H \cap K = \{e\}$

En efecto, por (a) $H \cap K$ es subgrupo de G ya que H y K lo son.

Luego, por **teo de LAGRANGE** y usando que

$H \cap K \subseteq H$ y $H \cap K \subseteq K$ se tiene que $H \cap K$ es subgrupo de H y de K al mismo tiempo

$$\Rightarrow \frac{|H|}{|H \cap K|} \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \frac{|K|}{|H \cap K|} \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow |H \cap K|$ es divisor de $|H| = 38$ y $|K| = 55$ al mismo tiempo

Divisores de $38 = \{1, 2, 19, 38\} \Rightarrow 1$ es el único común
Divisores de $55 = \{1, 5, 11, 55\}$

Luego $|H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$

P3 i) pda $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo

debemos probar que:

- (i) $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es grupo abeliano
- (ii) $\odot$ es asociativo
- (iii) $\odot$ distribuye con respecto a $\oplus$
- (iv) $\odot$ conmuta

Probamos cada uno:

(i) se tiene el enunciado me dice que $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es abeliano

(ii) pda $\odot$ es asociativa.

En efecto sea $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z}^2$

$$\Rightarrow [(a,b) \odot (c,d)] \odot (e,f) = [(ac, 0)] \odot (e,f) \\ = (ace, 0)$$

por otro
lado $\Rightarrow$

$$(a,b) \odot [(c,d) \odot (e,f)] = (a,b) \odot [(ce, 0)] \\ = (ace, 0)$$

problemas primera (iv) para ahorrar matracas

(iv) pda $\odot$ conmuta sea $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac, 0)$$

$$= (ca, 0)$$

$$= (c,d) \odot (a,b)$$

} Conmutatividad
de $\odot$ (multiplicación)

Donde la ultima igualdad es cierta pues

$$(c,x) \odot (a,y) = (ca, 0) \quad \forall x,y$$

$\therefore$ es conmutativa

(v) Distribuye $\odot$ sobre $\oplus$

En efecto, sea $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z}^2$

$$(a,b) \odot [(c,d) \oplus (e,f)] = (a,b) \odot [(c+e, d+f)]$$

$$= (a(c+e), 0)$$

$$= (ac + ae, 0)$$

$$= (ac, 0) \oplus (ae, 0)$$

$$= [(a,b) \odot (c,d)] \oplus [(a,b) \odot (e,f)]$$

∴ es anillo conmutativo

b) Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ tiene unidad y/o divisores del 0 ¿es cuerpo?

* Unidad: Supongamos hay unidad, llamémosla $(u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$ -
se tendría que cumplir que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (u_1, u_2) \odot (a, b) = (a, b)$$

pero esto no es posible ya que

$$(u_1, u_2) \odot (a, b) = (u_1 a, u_2 b) = (u_1 a, 0) \quad \text{para todo } b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \Leftarrow$$

∴ no hay unidad

* Divisores del Cero:

Notemos primero que el neutro de $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es el par $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ (verifíquelo!). Luego el "Cero" es $(0, 0)$

Para ver si hay divisores del Cero, debemos encontrar $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, $\neq (0, 0)$ tales que

$$(a, b) \odot (c, d) = (0, 0)$$

Plantemos la ecuación y veamos que obtenemos

Sea $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$(a,b) \odot (c,d) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (ac, 0) = (0,0)$$

$$\Rightarrow ac = 0 \Rightarrow a = 0 \vee c = 0$$

Con esto podemos tomar el par $(0,1) \neq (0,0)$
y $(0,2) \neq (0,0)$

$$\Rightarrow (0,1) \odot (0,2) = (0 \cdot 0, 0) = (0,0)$$

por lo que si hay divisores del cero =

por lo que tengo al menos los pares $(0,k)$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
que lo son

$\therefore (\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ no puede ser cuerpo ya que

Se necesita unidad y además un cuerpo no
posee divisores del cero

Nota: 0 es neutro de $(K, +)$ y 1 es neutro de $(K \setminus \{0\}, \cdot)$

94

a) neutro para $\oplus$, propongo el $(0_K, 0)$

neutro para $\odot$, propongo el $(1, 1)$

Verifique!

obs: se pueden plantear ecuaciones para obtener estas propuestas

b) pda $\forall (a, b) \in K \times K \setminus \{0_K, 0_K\}$

(a, b) es divisor del cero $\Leftrightarrow (a, b)$ no es invertible

Enefecto:

$(\Rightarrow)$ Si (a, b) es divisor del cero, entonces existe $(c, d) \in K \times K$, $(c, d) \neq (0, 0)$ tal que

$$(a, b) \odot (c, d) = (0, 0).$$

Por contradicción, supongamos es invertible

$$\Rightarrow (a, b) \odot (c, d) = (0, 0) \quad / (a, b)^{-1} \odot$$

$$\Rightarrow [(a, b)^{-1} \odot (a, b)] \odot (c, d) = (a, b)^{-1} \odot (0, 0)$$

$$\Rightarrow (1, 1) \odot (c, d) = (0, 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$(c, d) = (0, 0)$$

pero $(c, d) \neq (0, 0)$

$\Rightarrow \Leftarrow$

$\Leftarrow$ Veamos que significa ser no invertible en este problema, es decir, que se cumple

Sea (x, y) invertible en $(K \times K, \oplus, \odot)$

$$\Rightarrow (x, y) \text{ es invertible} \Leftrightarrow \exists (c, d) \text{ t.q. } (x, y) \odot (c, d) = (1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists (c, d) \text{ t.q. } (xc, yd) = (1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists c, d \text{ t.q. } xc = 1 \wedge yd = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists c \text{ t.q. } xc = 1 \wedge \exists d \text{ t.q. } yd = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Como } (K, +, \cdot) \\ \text{es cuerpo} \\ \Rightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot) \text{ es grupo} \end{matrix} \left(\begin{matrix} \Leftrightarrow X \text{ es invertible en } \cdot \\ \wedge \\ Y \text{ es invertible en } \cdot \\ \\ \Leftrightarrow X \neq 0 \wedge Y \neq 0 \end{matrix} \right)$$

Luego si (a, b) no es invertible $\Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

$\rightarrow$ demostramos ahora que

(a, b) no es invertible $\Rightarrow (a, b)$ es divisor del Cero

En efecto

Si $(a,b) \in K \times K \setminus \{0,0\}$ no es divisor del 0

$$\Rightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$$

Caso 1 Si $a \neq 0$, entonces puedo tomar el par $(1,0) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a,b) \odot (1,0) &= (0,b) \odot (1,0) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a,b)$ es divisor del Cero

Caso 2 Análogo, si $b \neq 0$ tomo el par $(0,1)$

$\therefore$ en cualquier caso (a,b) es divisor del Cero
 $\downarrow$
 $(0,0)$

c) No es cuerpo ya que $(1,0)$ es divisor del Cero
ya que $(1,0) \odot (0,1) = (0,0)$

y un cuerpo no tiene divisores del Cero