MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Extra C6: Lagrange, Anillos y Cuerpos

19 de junio de 2017

- A una estructura $(A, +, \cdot)$ le llamaremos anillo si satisface:
  1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
  2. $\cdot$ es asociativa.
  3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, tenemos la siguiente notación:
  1. Al neutro de $(A, +)$ se le suele denotar por 0, mientras que el inverso de x para $+$ se denota por $-x$.
  2. Si $(A, \cdot)$ tiene neutro a dicho neutro le llamaremos 1, más aún diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad. Si $x \in A$ posee inverso para $\cdot$ lo denotaremos por x^{-1}.
  3. Si $\cdot$ es conmutativa, diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad y $|A| \geq 2$, entonces $0 \neq 1$.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, entonces:
  1. 0 es absorbente.
  2. $(\forall x, y \in A)$, $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.
  3. $(\forall x, y \in A)$, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
  4. Si A tiene unidad:
  $$(\forall x \in A) \ -x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$$
- $(\mathbf{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ son tales que $x \cdot y = 0$, diremos que x e y son divisores del 0.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y $a \in A \setminus \{0\}$, luego:
  $$a \text{ es divisor del } 0 \iff a \text{ no es cancelable}$$
- Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ dos anillos con unidad. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, es decir:
  $$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad \wedge \quad f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$$
  $$\wedge \quad f(1_A) = 1_B$$
- Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que todo $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$, diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- De manera equivalente $(\mathbb{K}+, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si:
  1. $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
  2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
  3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son cuerpos.
- Un cuerpo no tiene divisores del 0.
- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que $|A|$ es finito. Entonces $(A, +, \cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ es un cuerpo $\iff$ n es un primo.
- Si $(A, +, \cdot)$ es un dominio de integridad con $|A|$ finito, entonces $(A, +, \cdot)$ es cuerpo.

P1. Sea $(G, *)$ un grupo tal que $|G|$ es finito.

a) Demuestre que si existe $x \in G \setminus \{1\}$ tal que $x = x^{-1}$, entonces $|G|$ es par.

b) Suponga ahora que $|G| = 4$. Encuentre el máximo número de subgrupos para $(G, *)$

P2. Sea $(G, *)$ es un grupo con neutro e.

a) Demuestre que si H, K son subgrupos de G entonces $H \cap K$ también lo es.

b) Demuestre que si H, K son subgrupos de G, tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$.

P3. En $\mathbb{Z}^2$ se definen las siguientes leyes de composición interna:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \odot (c,d) = (ac, 0)$$

Sabiendo que $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es grupo Abeliano (no lo demuestre).

(i) Verifique que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo.

(ii) Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ cuerpo? Justifique.

P4. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe (no lo demuestre) que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

a) Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.

b) Demuestre que $\forall (a,b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K} \times \mathbb{K}}\}$:

$$(a,b) \text{ es divisor del } 0 \iff (a,b) \text{ no es invertible}$$

c) ¿Es $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un cuerpo? Argumente.

P5. [**Propuesto - Control 5 2011**] Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá **Ideal** de A si y sólo si:

(i) $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$.

(ii) $(\forall\, a \in A)\, (\forall\, b \in I)\; a \cdot b \in I \;\wedge\; b \cdot a \in I$.

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, \oplus, \odot)$ un morfismo de anillos. Demuestre que la preimagen $F^{-1}(\{0_B\})$ es un Ideal de A, donde $0_B \in B$ es el neutro para $\oplus$ en B.

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I un ideal de A.

b.1) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$.

b.2) Demuestre que si $\exists\, x \in I$ invertible para $\cdot$ en A, entonces $I = A$.

P6. [**Propuesto - Control 6 2009**] Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo de orden 3 ($|\mathbb{K}| = 3$).

(i) Construya las tablas para las operaciones $+$ y $\cdot$, justificando su respuesta.

(ii) Encuentre un isomorfismo f entre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, explicitando las asignaciones de f.