

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 12: Grupos y Anillos

15 de junio de 2017

P1. Sea $(G, *)$ y (H, Δ) grupos. Considere las siguientes tablas (incompletas) que definen a las operaciones $*$ y Δ .

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			d	b
d				

Δ	p	q	r	s	t	u
p			q			
q	r					
r					r	
s		p				
t						
u	t					p

- a) Sea (G', \bullet) un grupo arbitrario. Demuestre que cada fila y cada columna de la tabla del grupo (G', \bullet) posee cada elemento de G' una única vez.
- b) Complete las tablas.

P2. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G . Probar que el conjunto.

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$

P3. Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$.

Muestre que $\forall a \in G, a^3 = a * a * a \neq e$.

Hint: Razone por contradicción y use el Teorema de Lagrange.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo booleano, es decir, $(A, +, \cdot)$ es un anillo que verifica que $a^2 = a$ para todo $a \in A$. Demuestre que:

- a) Para todo $x \in A$ se tiene que $x = -x$
- b) $(A, +, \cdot)$ es conmutativo.
- c) Para todo $x, y \in A$ se tiene que $(x \cdot y)(x + y) = 0$
- d) Ningún anillo booleano con más de 3 elementos es dominio de integridad (es decir, no posee divisores de cero). ¿Que pasa si el anillo tiene dos elementos?.

P5. [Propuesto - Traslaciones] Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e . Defina $f : G \rightarrow G$ un homomorfismo y $H = \{a \in G : f(a) = e\}$. Demuestre que H es subgrupo de G y que $\forall a \in G, a * H = H * a$ (es decir, dado $a \in G$ la traslación por la izquierda y la traslación por la derecha de H son iguales).

P6. [Propuesto - Lagrange] Sea $(G, *)$ un grupo tal que $|G|$ es finito.

- a) Demuestre que si existe $x \in G \setminus \{1\}$ tal que $x = x^{-1}$, entonces $|G|$ es par.
- b) Suponga ahora que $|G| = 6$. Demuestre que no existe $x \in G$ tal que $x^4 = e$ y $x \neq e$, $x^3 \neq e$.
- c) Suponga ahora que $|G| = 4$. Encuentre el máximo número de subgrupos para $(G, *)$

- Si $(G, *)$ es una estructura algebraica asociativa, con neutro y tal que todo elemento es invertible, entonces diremos que $(G, *)$ es un grupo. Si además la operación $*$ es conmutativa, diremos que es un grupo abeliano.

- Sea $(G, *)$ un grupo, entonces:

1. El inverso de cada elemento es único.
2. $(\forall x \in G), (x^{-1})^{-1} = x$.
3. $(\forall x, y \in G), (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
4. Todo elemento $x \in G$ es cancelable.
5. Para todo $a, b \in G$, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a * x_1 &= b \\ x_2 * a &= b \end{aligned}$$

tienen solución única. Ellas son $x_1 = a^{-1} * b$ y $x_2 = b * a^{-1}$.

6. El **único** elemento idempotente de G es su neutro.

- Sea $(G, *)$ un grupo, y sea $H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H, *)$ también es grupo.

- **Caracterización de Subgrupo:** Sea $H \neq \emptyset$, entonces:

$$(H, *) \text{ subgrupo de } (G, *) \Leftrightarrow (\forall x, y \in H) x * y^{-1} \in H$$

- $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ es un grupo abeliano.

- **Teorema de Lagrange:** Sea $(G, *)$ un grupo finito y $(H, *)$ un subgrupo de $(G, *)$. Entonces $|H|$ divide a $|G|$.

- Sea $(G, *)$ un grupo. A $|G|$ le llamaremos el orden del grupo.

- Si $f : G \rightarrow H$ es un morfismo y tanto $(G, *)$ como $(H, *)$ son grupos, entonces:

1. $f(e_G) = e_H$.

$$2. f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

- A una estructura $(A, +, \cdot)$ le llamaremos anillo si satisface:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. \cdot es asociativa.
3. \cdot distribuye con respecto a $+$.

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, tenemos la siguiente notación:

1. Al neutro de $(A, +)$ se le suele denotar por 0 , mientras que el inverso de x para $+$ se denota por $-x$.
2. Si (A, \cdot) tiene neutro a dicho neutro le llamaremos 1 , más aún diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad. Si $x \in A$ posee inverso para \cdot lo denotaremos por x^{-1} .
3. Si \cdot es conmutativa, diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad y $|A| \geq 2$, entonces $0 \neq 1$.

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, entonces:

1. 0 es absorbente.
2. $(\forall x, y \in A), -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.
3. $(\forall x, y \in A), (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
4. Si A tiene unidad:

$$(\forall x \in A) -x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$$

- $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo conmutativo con unidad.

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ son tales que $x \cdot y = 0$, diremos que x e y son divisores del 0 .