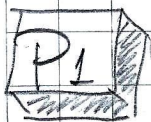


Resolución Aux #11



$(\mathbb{R}^2, *)$ con $*$ L.C.

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$$

a) Estudiar Conmutatividad y asociatividad de $*$

Conmutatividad $\Leftrightarrow (\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, (a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b))$

Sea $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ arbitrarios

Calculemos $\rightarrow (a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$

$$\rightarrow (c,d) * (a,b) = (ca, da+b) = (ac, da+b)$$

es directo que $ac = ca$ pues es la multiplicación en $\mathbb{R}$. Sin embargo $bc+d \neq da+b$

Luego $*$ no es conmutativo

Asociatividad $\Leftrightarrow \forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [(a,b) * (c,d)] * (e,f) &= (ac, bc+d) * (e,f) \\ &= (ace, (bc+d)e + f) \\ &= (ace, bce + de + f) = \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow (a,b) * [(c,d) * (e,f)] &= (a,b) * (ce, de+f) \\
 &= (ace, bce + de + f) \\
 &= (a,b)
 \end{aligned}$$

Luego ambas son iguales a $\mathcal{O}$

$\therefore *$ es asociativa ya que

$$[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$$

b) el elemento neutro (e_1, e_2) debe cumplir que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (a,b) = (a,b)$$

Impongamos una ecuación para encontrar una propuesta de neutro

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (a,b) * (e_1, e_2) &= (ae_1, be_1 + e_2) \\
 &= (a,b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow ae_1 &= a \quad \wedge \quad be_1 + e_2 = b \\
 &\Downarrow \\
 e_1 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow be_1 + e_2 = b + e_2 = b \Rightarrow e_2 = 0$$

$\Rightarrow$ propuesta de neutro $(1, 0)$

Verifiquemos que efectivamente cumple con ser neutro el elemento $(1,0)$

$$\rightarrow (a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b)$$

$$\rightarrow (1,0) * (a,b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (a,b)$$

$\therefore (1,0)$ es neutro

c) (a,b) es invertible si $\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$$(a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b) = e \rightarrow \text{neutro}$$

$\Rightarrow$ Sea (a,b) arbitrario, busquemos un propuesto de inverso

$$(a,b) * (c,d) = (1,0)$$

$$\Rightarrow (ac, bc+d) = (1,0)$$

$$\Rightarrow ac = 1 \quad , \quad bc + d = 0$$

$\Downarrow$

$$c = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad d = -bc = -\frac{b}{a}$$

esto es valido para $a \neq 0$

PROARTE. Veamos que dado (a,b) su inverso es $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

$$\rightarrow (a, b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, \frac{b}{a} + \left(-\frac{b}{a}\right)\right) \\ = (1, 0)$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a, b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a, -\frac{b}{a} \cdot a + b\right) \\ = (1, -b + b) \\ = (1, 0)$$

$\therefore (a, b)$ con $a \neq 0$ es invertible
y su inverso es $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$

d) Un elemento idempotente es $(a, b) * (a, b) = (a, b)$

Veamos quienes son idempotentes

$$\rightarrow (a, b) * (a, b) = (a, b) \quad \text{?imposible}$$

$$\text{y } (a, b) * (a, b) = (a^2, ba + b) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a^2 = a \quad \wedge \quad ba + b = b$$

$\Downarrow$

$$a = 1$$

$\vee$

$$a = 0$$

dos casos

$$\Rightarrow 1) a = 1 \quad \wedge \quad ba + b = b$$

$$2) a = 0 \quad \wedge \quad ba + b = b$$

$$\boxed{1} \quad a = 1 \quad \wedge \quad ba + b = b$$

$$\Rightarrow b + b = b \Rightarrow 2b = b \Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow (1, 0)$ es idempotente! claro es el neutro

$$\boxed{2} \quad a = 0 \quad \wedge \quad ba + b = b$$

$$\Rightarrow b \cdot a + b = b$$

$\Rightarrow b = b$ es cierto siempre para cualquier $b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (0, b)$ es idempotente ya que

$$(0, b) * (0, b) = (0, b \cdot 0 + b) = (0, b) \quad \text{con } b \in \mathbb{R}$$

$\therefore (1, 0)$ es idempotente y
 $\forall b \in \mathbb{R}, (0, b)$ es idempotente

P2 a) Sea $f: (A, *) \rightarrow (B, \Delta)$ un homomorfismo, es decir,

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) \Delta f(a_2)$$

y además e_A es neutro de $(A, *)$ y e_B neutro de (B, Δ) , asociativa y con todos sus elementos invertibles

pdg $f(e_A) = e_B$

En efecto, notemos que

$$f(e_A * e_A) = f(e_A) \Delta f(e_A) \quad (1)$$

por otro lado $f(e_A * e_A) = f(e_A) \quad (2)$

(1) y (2)

$$\Rightarrow f(e_A) = f(e_A) \Delta f(e_A) \quad (3)$$

Notemos que $f(e_A) \in B$ y en B TODOS SON INVERTIBLES!

$$\Rightarrow \exists (f(e_A))^{-1} \in B \text{ tq } f(e_A) \Delta (f(e_A))^{-1} = (f(e_A))^{-1} \Delta f(e_A) = e_B$$

$$\Rightarrow \text{de (3)} \quad f(e_A) = f(e_A) \Delta f(e_A) \quad / \quad \Delta (f(e_A))^{-1}$$

$$\Rightarrow f(e_A) \Delta (f(e_A))^{-1} = f(e_A) \Delta f(e_A) \Delta (f(e_A))^{-1}$$

Asociatividad

$$\Rightarrow f(e_A) \Delta (f(e_A))^{-1} = f(e_A) \Delta (f(e_A) \Delta (f(e_A))^{-1})$$

Inverso

$\Rightarrow$

$$e_B = f(e_A) \Delta e_B$$

$\Rightarrow$

$$e_B = f(e_A)$$



$$b) \quad \mathbb{Z}_m = \{ [0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m \} \quad \left. \vphantom{\mathbb{Z}_m} \right\} \text{ DATOS}$$

$$[a]_m +_m [b]_m = [a+b]_m$$

propongo $[0]_m$ como neutro

$$\text{en efecto } [a]_m +_m [0]_m = [a+0]_m = [a]_m$$

$$= [0+a]_m$$

$$= [0]_m +_m [a]_m$$

Luego $[0]_m$ es neutro en $\mathbb{Z}_m$

Luego $\varphi: (\mathbb{Z}_m, +_m) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morfismo cualquiera

$$\text{pda } \varphi \equiv 0$$

Notemos que $(\mathbb{Z}, +)$ cumple con que

- tiene neutro, el 0
- es asociativo
- Todo elemento es invertible ($a^{-1} = -a$)

En efecto, recordemos que $[m]_m = [0]_m$

$\Rightarrow$ estudiemos $\varphi([m]_m)$ pues aquí pasan cosas raras y que son muy interesantes pero veámoslo de otra forma

$$\begin{aligned}\varphi(\underbrace{[1]_m + [1]_m + \dots + [1]_m}_{m\text{-veces}}) &= \varphi([m]_m) \\ &= \varphi([0]_m) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\varphi([1]_m + [1]_m + \dots + [1]_m) &= \varphi([1]_m) + \varphi([1]_m) + \dots + \varphi([1]_m) \\ &= m\varphi([1]_m)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m\varphi([1]_m) = 0 \quad \text{Como } m \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi([1]_m) = 0$$

Ahora sea $[k]_m \in \mathbb{Z}_m$ cualquiera

$$\varphi([k]_m) = \varphi(\underbrace{[1]_m + \dots + [1]_m}_{k\text{-veces}}) = k\varphi([1]_m) = k \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \varphi([k]_m) = 0 \quad \forall [k]_m \in \mathbb{Z}_m$$

$$\boxed{P3} \quad (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$$

$$([n], m) \oplus ([n'], m') = ([n+n'], m+m')$$

a) propongo $([0], 0)$

$$\Rightarrow ([n], m) \oplus ([0], 0) = ([n+0], m+0) \\ = ([n], m)$$

por otro lado

$$([0]_3, 0) \oplus ([n]_3, m) = ([0+n]_3, 0+m) \\ = ([n]_3, m)$$

Luego $([0]_3, 0)$ es neutro $\square$

b) pda $\varphi([1]_3, 0) = 0$

En efecto

$$\text{por un lado } \varphi([1]_3, 0) \oplus [1]_3, 0) \oplus ([1]_3, 0) = \varphi([3]_3, 0) \\ = \varphi([0]_3, 0) \\ = 0$$

por otro lado Como φ es homomorfismo

pero 0 es neutro en $\mathbb{Z}$

$$\varphi([1]_3, 0) \oplus [1]_3, 0) \oplus ([1]_3, 0) = \varphi([1]_3, 0) + \varphi([1]_3, 0) + \varphi([1]_3, 0) \\ = 3 \varphi([1]_3, 0)$$

$$\Rightarrow \exists \varphi([1], 0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi([1], 0) = 0$$

c) Notar φ es un homomorfismo cualquiera

que cumple que $\varphi([1], 0) = 0$ y además

$$\varphi([0], 0) = 0 \quad (\text{obs: } \varphi^{-1}(0) = \{[0], [1], 0\})$$

Luego hay 2 preimágenes distintas que generan la misma imagen PARA UN MORFISMO CUALQUIERA

$\Rightarrow$ No hay isomorfismos entre $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ ya que nunca se cumple la inyectividad

$$\therefore \mathbb{Z}_3 \not\cong \mathbb{Z}$$

Propuestas

P4 $(A, *)$ E.A. Asociativa Sea $a \in A$ fijo

$$B = \{x \in A : a * x = x * a\}$$

a) pda $\forall x, y \in B \quad x * y \in B$

es decir debo demostrar que

$$\forall x, y \in B \quad (x * y) * a = a * (x * y)$$

En efecto, $(x * y) * a = x * (y * a)$

Asocio

$$= x * (a * y)$$

$y \in B \Rightarrow y * a = a * y$

$$= (x * a) * y$$

Asocio

$$= (a * x) * y$$

$x \in B \Rightarrow x * a = a * x$

$$= a * (x * y)$$

Asocio



b) si $e \in A$ neutro $\Rightarrow e \in B$

En efecto, como e es neutro en A

$$\Rightarrow \forall x \in A \quad e * x = x * e = x$$

En particular puedo tomar $a \in A$ y se sigue
Cumpliendo

$$\Rightarrow e * a = a * e = a$$

$$\Rightarrow e \in B$$

c) $x \in B$ con inverso $x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in B$

En efecto debo demostrar que

$$x^{-1} * a = a * x^{-1}$$

$$2) \quad x^{-1} * a = (x^{-1} * a) * e \quad / \text{ neutro}$$

$$= x^{-1} * (a * e) \quad / \text{ asocio}$$

$$= x^{-1} * (a * (x * x^{-1})) \quad / \quad x * x^{-1} = e$$

$$= x^{-1} * ((a * x) * x^{-1}) \quad / \text{ Asocio}$$

$$= x^{-1} * ((x * a) * x^{-1}) \quad / \quad x \in B \text{ es cerrado}$$

$$= (x^{-1} * x) * (a * x^{-1}) \quad / \text{ Asocio}$$

$$= e * (a * x^{-1}) \quad / \quad x^{-1} * x = e$$

$$= a * x^{-1} \quad / \text{ neutro}$$

P5

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$$

a) i) Estructura algebraica $\Leftrightarrow \oplus$ es L.C.

En efecto, sea $([a]_2, [b]_3), ([c]_2, [d]_3)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ([a]_2, [b]_3) \oplus ([c]_2, [d]_3) &= ([a]_2 +_2 [c]_2, [b]_3 +_3 [d]_3) \\ &= ([a+c]_2, [b+d]_3) \end{aligned}$$

$$\text{y } ([a+c]_2, [b+d]_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

ii) Asociativa: se los dejo a usted.

iii) Neutro: propongo $([0]_2, [0]_3)$ verifiquenlo ustedes

iv) Inverso: Dado $([a]_2, [b]_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

propongo de inverso a $([-a]_2, [-b]_3)$

$$\Rightarrow ([a]_2, [b]_3) \oplus ([-a]_2, [-b]_3) = \dots = ([0]_2, [0]_3)$$

$$\hookrightarrow ([-a]_2, [-b]_3) \oplus ([a]_2, [b]_3) = \dots = ([0]_2, [0]_3)$$

Comprueben AMBAS!

$$b) \mathbb{Z}_2 = \{ [0]_2, [1]_2 \}$$

$$\mathbb{Z}_3 = \{ [0]_3, [1]_3, [2]_3 \}$$

$$\mathbb{Z}_6 = \{ [0]_6, [1]_6, \dots, [5]_6 \}$$

Sea $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, notemos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

Cumple con lo visto en p2 a)

$$\Rightarrow f([0]_6) = ([0]_2, [0]_3)$$

por enunciado $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$

Como queremos que f sea morfismo "Lo vamos a forzar" sin saber toda su forma a que se comporte como un morfismo

$$\Rightarrow f([2]_6) = f([1]_6 +_6 [1]_6) \quad \text{morfismo}$$

$$= f([1]_6) \oplus f([1]_6)$$

$$= ([1]_2, [1]_3) \oplus ([1]_2, [1]_3)$$

$$= ([2]_2, [2]_3) = ([0]_2, [2]_3)$$

Seguir de la misma forma

$$f([3]) = f([1] + [1] + [1])$$

$$f([4]) = f([1] + \underbrace{\dots}_{4 \text{ veces}} + [1])$$

∴ Siguen ustedes.

Notar que este procedimiento solo genera una única manera de asignación por lo tanto esta función es única

Prueben que es biyectivo y prueben que es morfismo y concluyan

(Ver PAINEQUEO P7 - Estructuras Alg)

P6

P3. [Operación de Funciones]

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la l.c.i. $*$ como:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que:

- a) $*$ es conmutativa.
- b) $(\mathcal{F}, *)$ posee elemento neutro, y encuentrelo.
- c) $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones, $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$.

Solución 3.

a) Sean $f, g \in \mathcal{F}$. Luego:

$$\begin{aligned} (f * g)(n) &= \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k) \\ &= f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \cdots + f(n-1)g(1) + f(n)g(0) \\ &= g(0)f(n) + g(1)f(n-1) + \cdots + g(n-1)f(1) + g(n)f(0) \\ &= \sum_{k=0}^n g(k)f(n-k) \\ &= (g * f)(n) \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar un g tal que:

$$(f * g)(n) = f(n)$$

Basta por un lado, pues la operación es conmutativa. Notemos que el término $f(n)$ ya aparece en la operación, pues:

$$(f * g)(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \cdots + f(n-1)g(1) + f(n)g(0)$$

Nos gustaría tomar un g entonces que mate a todos los otros elementos de la suma, salvo $f(n)$. Esto hace nacer la idea de tomar:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En efecto veamos que es el neutro:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k) = f(n) \underbrace{g(0)}_{=1} + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \underbrace{g(n-k)}_{=0} = f(n)$$

De donde vemos que g es el neutro.

c) De nuevo como la operación es conmutativa, basta con chequear la distributividad por un lado. Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}([f + g] * h)(n) &= \sum_{k=0}^n (f + g)(k)h(n - k) \\&= \sum_{k=0}^n [f(k) + g(k)]h(n - k) \\&= \sum_{k=0}^n f(k)h(n - k) + \sum_{k=0}^n g(k)h(n - k) \\&= (f * h)(n) + (g * h)(n)\end{aligned}$$

De donde se concluye.