Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Unidad de Calidad de Vida Estudiantil
MA1101 Introducción al Álgebra

# Problemas Resueltos Apunte de Introducción al Álgebra (Versión Apunte 2017)

Sebastián Espinosa Trujillo
Dudas y consultas: seba-spio@hotmail.com
Versión 8.0 Año 2017

# Índice

# 1. Introducción

La presente guía tiene como propósito orientar a los alumnos que cursan su primer año de universidad en la resolución de los problemas presentados en el apunte del curso Introducción al Álgebra, es importante destacar que siempre va a existir más de una solución para un determinado problema, los que se presentan a continuación son solamente una referencia y bajo ninguna circunstancia serán la única forma de resolverlos, recordar que es sólo una orientación y un sólo método propuesto. Es recomendable que realicen los problemas en un comienzo sin ver las pautas y solamente si no han podido resolverlo después de pasado un tiempo vean la solución, no es malo ver pautas, ayuda a entender mejor el ejercicio y entrega otra mirada de cómo abarcarlo, sin embargo, tampoco es bueno estar pendiente de la pauta en todo momento ya que uno se vuelve dependiente de ellas, y se termina convirtiendo en un problema mecanizado.

Un buen método de estudio no es precisamente memorizarse todas las formas de resolver un problema ya que siempre preguntarán por uno nuevo, es preferible discutir en grupo las cosas que no se entiendan y luego explicar los conceptos con sus propias palabras a modo de entender la materia, no hay que memorizarse fórmulas sino más bien saber de dónde provienen.

Debido a que es la versión 7.0 es posible que aún existan errores de tipeo, les agradecería que cualquiera que encuentren me lo informen para corregirlo a la brevedad. Si hay cosas que aún después de leída la solución siguen sin entenderse pueden consultar a mi mail para explicarlo con más detalle, y para luego en ediciones posteriores profundizar en dicho problema.

La materia vista en este curso puede ser en algunos momentos abstracta y es por esto que algunos problemas se explican con ejemplos más concretos para poder facilitar la comprensión de éstos, es indispensable entender los conceptos de estas 15 semanas, especialmente de las primeras, ya que entregan una base muy necesaria para los cursos posteriores.

Espero que esta guía sea de ayuda a las generaciones que vienen y que sea un buen material de apoyo. La idea surgió después de ser auxiliar de este mismo curso y creo que los mismos estudiantes serán capaces de ir mejorando este material con el pasar de los tiempos.

# 2. Semana 1

**P1 (a)**

$$
\begin{aligned}
&((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &[((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q))] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &[((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (p \vee q))] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &[((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge (\overline{p} \vee p \vee \overline{r} \vee q)] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &[((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge V] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &((p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})) \vee ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &([(p \vee q) \wedge \overline{p}] \vee [(p \vee q) \wedge \overline{r}]) \vee ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))\\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee ((\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r))\\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee ([(\overline{q} \vee p) \wedge \overline{p}] \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge r])\\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &F \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee F \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee [p \wedge (\overline{r} \vee r)]\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee [p \wedge V]\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee p\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee p)]\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge V]\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \vee p)\\
\Leftrightarrow\ &(q \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \vee p) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &\overline{(\overline{q} \vee p)} \vee (\overline{q} \vee p) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &V \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &V
\end{aligned}
$$

Como habrán notado, este método a veces puede resultar poco eficiente, ahora se verán otros que para ciertas situaciones es mucho más rápido. Lo que está a la izquierda de la implicancia se llama hipótesis $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$, y es la información que uno tiene a disposición y se sabe que es verdadera, recuerden que la implicancia es una consecuencia o algo que se quiere deducir a partir de la hipótesis, para futuras demostraciones siempre se utilizará esto para llegar a demostrar que es verdadero el resultado final (parte derecha de la implicancia). Ahora aplicaremos, sabiendo esto, este método en el mismo problema, es decir, desde la izquierda llegar a la derecha mediante tautologías o propiedades.

$$\begin{aligned}
&((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \\
\Leftrightarrow\ & [((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge (\overline{p} \vee p \vee \overline{r} \vee q) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge V \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee p) \wedge ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & V \wedge (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r) \\
\Rightarrow\ & (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)
\end{aligned}$$

Fijarse que efectivamente a partir de la izquierda se llegó a la derecha, y se utilizaron equivalencias y una tautología conocida $((p \wedge q) \Rightarrow q)$, cuando se tienen varias proposiciones unidas con el colectivo lógico $\wedge$, implica en particular al menos una de ellas, por ejemplo, $((p \wedge q \wedge r \wedge m \wedge s) \Rightarrow r)$, es fácil demostrarla ya que $((p \wedge q) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{(p \wedge q)} \vee q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q} \vee q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee V \Leftrightarrow V$, notar que al revés no es cierto, es decir, $p$ no implica $p \wedge q$ y por eso que es una implicancia y no una equivalencia. Debido a esto que se nos pide demostrar $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$ y no $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$ ya que al revés no ocurre.

Existe otra forma de resolver el problema y es tomando la parte derecha de la implicancia, trabajar con ella un poco y en algún momento del desarrollo utilizar la hipótesis para llegar a que efectivamente es una tautología, aplicaremos este método en el mismo problema.

$$\begin{aligned}
&(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{q} \vee p) \wedge \overline{p}) \vee ((\overline{q} \vee p) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee F \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{(p \vee q)} \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{(p \wedge r)} \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \qquad \backslash\text{aquí se utilizó la hipótesis } ((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{(p \wedge r)} \vee (p \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}$$

Como se pudo apreciar, en un momento se utiliza la hipótesis, que es verdadera, para realizar el cambio oportuno y resolver el problema, debido a que $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$ es una equivalencia, el cambio también se hizo mediante una equivalencia, y se llegó a una tautología tal cual se quería demostrar.

Todos estos métodos son válidos y ninguno es mejor que otro, dependerá exclusivamente del problema, existe un cuarto método que es por inspección o contradicción, muy utilizado cuando se tienen implicancias, se resolvió de esa manera en el ejemplo (d) y sugiero revisarlo.

**(b)**

$$\begin{aligned} & [(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \\ \Leftrightarrow\ & [(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{r})] \\ \Rightarrow\ & [(p \Rightarrow \overline{r})] \qquad \backslash\text{transitividad} \end{aligned}$$

Este método lo que hizo fue tomar la parte de la izquierda de la implicancia del problema $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)]$ y llegar, mediante propiedades y tautologías, a la parte derecha de la implicancia $[(p \Rightarrow \overline{r})]$, se utilizó especificamente la transitividad en proposiciones.

**(c)**

$$\begin{aligned} & (p \Rightarrow q) \Rightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\ \Leftrightarrow\ & (\overline{p} \vee q) \Rightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{q}) \vee [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge r) \vee \overline{(p \wedge r)} \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge r) \vee \overline{p} \vee \overline{r} \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p} \vee (q \wedge r) \vee \overline{r} \\ \Leftrightarrow\ & [(p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(q \vee \overline{r}) \wedge (r \vee \overline{r})] \\ \Leftrightarrow\ & [V \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(q \vee \overline{r}) \wedge V] \\ \Leftrightarrow\ & \overline{q} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{r} \\ \Leftrightarrow\ & V \end{aligned}$$

**(d)** Supongamos que no es tautología, como nos piden demostrar que sí lo es, deberíamos llegar a una contradicción, en efecto, si suponemos que no es tautología quiere decir que existe un caso en el cual la expresión

$$\underbrace{[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r]}_{1} \Rightarrow \underbrace{\overline{p}}_{2}$$

Es falsa, esto solamente se puede dar si 1 es verdadera y 2 es falsa, con esto necesariamente $p$ es verdadero, luego para que 1 sea verdadero $(p \Rightarrow \overline{q})$, $(\overline{r} \vee q)$ y $r$ deben serlo. Dado que $\overline{r}$ es falso, solamente queda que $q$, sea verdadero $(\overline{r} \vee q)$, pero como $p$ es verdadero, necesitamos que $\overline{q}$ también lo sea $(p \Rightarrow \overline{q})$, es decir, que $q$ sea falso, con lo cual hemos llegado a la contradicción ya que $q$ tiene que ser verdadero y falso a la vez para que no sea tautología, como esto no sucede, lo que se supuso al principio no era correcto y, por lo tanto, sí estamos en presencia de una tautología.

**P2** **(a)** Como $p \Rightarrow q$ es falsa, necesariamente $p$ es verdadero y $q$ es falso, luego la expresión queda como sigue

$$\begin{aligned}
& p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & V \vee (F \wedge r) \Leftrightarrow (V \vee r) \wedge F \\
\Leftrightarrow\ & (V \vee F) \Leftrightarrow (V \wedge F) \\
\Leftrightarrow\ & V \Leftrightarrow F \\
\Leftrightarrow\ & F
\end{aligned}$$

Por lo tanto esa equivalencia no puede ser verdadera.

**(b)**

$$\underbrace{[s \Rightarrow (r \vee \overline{r})]}_{1} \Rightarrow \underbrace{[\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r}]}_{2}$$

Notemos que 1 siempre es verdadero ya que $(r \vee \overline{r})$ lo es, esto obliga a que 2 también lo sea, con esto presente, $s$ es verdadero, $r$ es falso y $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$ es verdadero, finalmente, $p$ es verdadero y $q$ es falso.

**(c)** Primero procedemos a trabajar un poco la expresión.

$$\begin{aligned}
& [(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee (\overline{q} \vee s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee (F \vee s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee s] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s)
\end{aligned}$$

Se realizó el cambio correspondiente de $q \Leftrightarrow V$ por hipótesis de enunciado, además $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge V) \Leftrightarrow p$ no es equivalente con $s \Leftrightarrow r$, con esto lo mejor es separarlo por casos:

1) $p$ es verdadero

$$\begin{aligned}
& [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & [(F \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee V \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}$$

2) $p$ es falso, como no es equivalente con $s \Leftrightarrow r$, significa que $s \Leftrightarrow r$ es verdadero, con esto tenemos nuevamente 2 casos

   2.1) $r, s$ son verdaderos

$$
\begin{aligned}
& [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & [(V \vee F) \wedge F] \vee F \vee (V \wedge V) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}
$$

   2.2) $r, s$ son falsos

$$
\begin{aligned}
& [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & [(V \vee V) \wedge V] \vee F \vee (F \wedge F) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}
$$

Con lo que se concluye que es una tautología

# 3. Semana 2

**P1**

- Caso base ($n = 1$): $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ claramente divisible por 24.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24k$ , para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 24j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 14 \cdot 7^n + 15 \cdot 5^n - 5 \\
&= 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n \\
&= 24k + 12(7^n + 5^n) \qquad \backslash \text{hipótesis inductiva} \\
&= 24k + 12(2l) \qquad \backslash 7^n + 5^n \text{es siempre par (suma de 2 impares)} \\
&= 24(k + l) \\
&= 24j \qquad \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para convencerse vamos a demostrar que $7^n + 5^n$ es par o lo que es lo mismo, demostrar que es divisible por 2, se hará mediante inducción.

- Caso base ($n = 1$): $7^1 + 5^1 = 12$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $7^n + 5^n = 2k$ , para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $7^{n+1} + 5^{n+1} - 5 = 2j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
7^{n+1} + 5^{n+1} &= 7 \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 7^n + 4 \cdot 5^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 7^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 2k \qquad \backslash \text{hipótesis inductiva} \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n) + 2k \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n + k) \\
&= 2j \qquad \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**P2**

- Caso base ($n = 10$): $10^3 = 1000 < 2^{10} = 1024$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $n^3 \leq 2^n$, para cierto $n \geq 10$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $(n + 1)^3 < 2^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
(n + 1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 1 \quad \backslash \text{como } 1 < 3n \text{ multiplicando por } n \text{ se tiene } 3n < 3n^2 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 \quad \backslash \text{como } 1 < \sqrt{3}n \text{ elevando a 2 se tiene que } 1 < 3n^2 \\
&< n^3 + 9n^2 \\
&< n^3 + n^3 \qquad \backslash \text{como } 9 < n \text{ multiplicando por } n^2 \text{ se tiene } 9n^2 < n^3 \\
&< 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad \backslash \text{hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Es posible realizar el problema de otra manera, menos directa, pero igualmente válida, que es hacer inducción sobre inducción, es decir, si en el momento que realizan el paso inductivo llegan a una desigualdad que no es directa, pero les ayuda a resolver el problema, la demuestran con inducción, pueden aplicar inducción sobre inducción cuantas veces quieran.

**P3** Primero calculamos $a(3) = 3[a(2) + a(1)] + 1 = 7$ y $a(4) = 3[a(3) + a(2)] + 1 = 25$.

**(a)**
- Caso base ($n = 1$): $a(3 \cdot 1 + 2) - 1 = a(5) - 1 = 3[a(4) + a(3)] = 3[3[a(3) + a(2)] + 1 + a(3)] = 96$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n + 2) - 1 = 2k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $a(3(n + 1) + 2) - 1 = 2j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)+2) - 1 &= a(3n+5) - 1 \\
&= 3[a(3n+4) + a(3n+3)] \\
&= 3[3[a(3n+3) + a(3n+2)] - 1 + a(3n+3)] \\
&= 3[4a(3n+3) + 2a(3n+2) + a(3n+2) - 1] \\
&= 3[4a(3n+3) + 2a(3n+2) + 2k] \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= 2(3[2a(3n+3) + a(3n+2) + k]) \\
&= 2j \qquad \backslash\text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**(b)**
- Caso base ($n = 1$): $3a(3 \cdot 1 + 1) + 5 = 3a(4) + 5 = 80$ claramente divisible por 8.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $3a(3n + 1) + 5 = 8k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $3a(3(n + 1) + 1) + 5 = 8j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
3a(3(n+1)+1) + 5 &= 3a(3n+4) + 5 \\
&= 3[3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1] + 5 \\
&= 9[a(3n+3) + a(3n+2)] + 8 \\
&= 9[3[a(3n+2) + a(3n+1)] + 1 + a(3n+2)] + 8 \\
&= 36a(3n+2) + 27a(3n+1) + 17 \\
&= 36[a(3n+2) - 1] + 36 + 9[3a(3n+1) + 5] - 45 + 17 \\
&= 36(2i) + 36 + 9[3a(3n+1) + 5] - 45 + 17 \quad \backslash\text{parte (a)} \\
&= 36(2i) + 9(8k) + 8 \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= 8(9i + 9k + 1) \\
&= 8j \qquad \backslash\text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**(c)**
- Caso base ($n = 1$): $a(3 \cdot 1) + a(3 \cdot 1 + 1) = a(3) + a(4) = 32$ claramente divisible por 32.

- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n) + a(3n+1) = 32k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) = 32j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) &= a(3n+3) + a(3n+4) \\
&= a(3n+3) + 3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 4(3a(3n+2) + 3a(3n+1) + 1) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 15a(3n+2) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 15(3[a(3n+1) + a(3n)] + 1) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 45(32k) + 15 + 12a(3n+1) + 5 \qquad \backslash \text{H.I} \\
&= 45(32k) + 15 + 4(3a(3n+1) + 5) - 20 + 5 \\
&= 45(32k) + 32i \quad \backslash \text{parte (b)} \\
&= 32(45k + i) \\
&= 32j \qquad \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**P4**

- Caso base ($n = 1$): $(1+x) = \frac{x^{2^1}-1}{x-1} = \frac{(1+x)(x-1)}{x-1} = (x+1)$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) &= \frac{x^{2^n}-1}{x-1}(1+x^{2^n}) \qquad \backslash \text{H.I.} \\
&= \frac{x^{2^n} + x^{2^n+2^n} - 1 - x^{2^n}}{x-1} \\
&= \frac{x^{2\cdot 2^n} - 1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x-1}
\end{aligned}$$

# 4. Semana 3

**P1** **(a)** **(1)** Por álgebra lógica:

$$(\forall x)[x \in B \backslash A \Rightarrow x \in C]$$

Sea $x_0$ arbitrario

$$\begin{aligned}
& x_0 \in B\backslash A \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \cap A^c \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \wedge x_0 \in A^c \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin B \vee x_0 \notin A^c \vee x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B^c \vee x_0 \in A \vee x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin C^c \vee x_0 \in B^c \vee x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin C^c \vee x_0 \in (B^c \cup A) \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in C^c \Rightarrow x_0 \in (B^c \cup A)
\end{aligned}$$

Como es para un $x_0$ arbitrario se concluye que $C^c \subseteq (B^c \cup A)$.

**(2)**

$$\begin{aligned}
& B\backslash A \subseteq C \\
\Leftrightarrow\ & C^c \subseteq (B^c \cup A) && \backslash \cap D \\
\Rightarrow\ & C^c \cap D \subseteq (B^c \cup A) \cap D \\
\Leftrightarrow\ & (D\backslash C) \subseteq (B^c \cup A) \cap D \\
\Leftrightarrow\ & (D\backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \\
\Leftrightarrow\ & (D\backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \subseteq (B^c \cap D) \cup A && \backslash X \cap D \subseteq X \text{ siempre!} \\
\Rightarrow\ & (D\backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup A
\end{aligned}$$

*Nota: Siempre se tiene que, dados dos conjuntos cualesquiera $A$ y $B$, $A \cap B \subseteq B$ y* $A \subseteq A \cup B$, demostrar esto es bastante sencillo y se hace con álgebra lógica.

Para el primer caso

$$(\forall x)[x \in B \cap A \Rightarrow x \in A]$$

Sea $x_0$ arbitrario

$$\begin{aligned}
& x_0 \in B \cap A \Rightarrow x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \wedge x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin B \vee x_0 \notin A \vee x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}$$

Para el segundo caso

$$(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$$

Sea $x_0$ arbitrario

$$\begin{aligned} & x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \vee x_0 \in B \\ \Leftrightarrow\ & x_0 \notin A \vee x_0 \in A \vee x_0 \in B \\ \Leftrightarrow & V \end{aligned}$$

**(b)** $\Rightarrow$ Se sabe que $A \subseteq A \cup B$, y que $A \cap C \subseteq C$ luego usando esto y la hipótesis se tiene que:

$$A \subseteq A \cup B = A \cap C \subseteq C$$

se concluye que $A \subseteq C$ y de manera análoga $B \subseteq A$.

$\Leftarrow$ Como $B \subseteq A$, uniendo con $A$ se tiene que $B \cup A \subseteq A \cup A$, además $A \subseteq A \cup B$, siempre, luego, uniendo ambas expresiones, se tiene la igualdad $B \cup A = A$, de manera análoga, como $A \subseteq C$, intersectando con $A$, se tiene que $A \cap A \subseteq C \cap A$, además $A \cap C \subseteq A$, juntando ambas expresiones se tiene que $A \cap C = A$, con esto se tiene finalmente que $A \cap C = A = B \cup A$, es decir, $A \cap C = B \cup A$.

**P2**

$$\begin{aligned} & (A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \\ \Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle C = U \qquad \backslash \text{ya que } C = (A \cup B)^c \\ \Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle C = U \qquad \backslash \triangle C \\ \Rightarrow\ & (A \triangle B) \triangle (C \triangle C) = (U \triangle C) \\ \Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle \emptyset = C^c \\ \Leftrightarrow\ & A \triangle (B \triangle \emptyset) = C^c \\ \Leftrightarrow\ & A \triangle B = A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & (A \cup B) \backslash (A \cap B) = A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A \cup B \end{aligned}$$

Ahora procedemos a trabajar con esta igualdad mucho más sencilla que la original.

$\Rightarrow$ Como $A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \subseteq (A \cap B)^c$, luego $A \cup B \subseteq (A \cap B)^c \Leftrightarrow A \cap B \subseteq (A \cup B)^c$, intersectando con $A$ a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned} & A \cap B \subseteq (A \cup B)^c \qquad \backslash \cap A \\ \Rightarrow\ & A \cap B \cap A \subseteq A^c \cap B^c \cap A \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ siempre sucede se concluye que $A \cap B = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Como $A \cap B = \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) \cap (\emptyset)^c \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

# 5. Semana 4

**P1** Se resolverá por contrarecíproca,es decir,

$$A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists X, Y \in P(U))(A \cup X = A \cup Y \wedge X \neq Y)$$

Al castellano, hay que encontrar dos conjuntos tales que $A \cup X = A \cup Y$ y además sean distintos entre sí. En efecto tomemos $X = A$ e $Y = \emptyset$, los cuales son distintos por hipótesis ($A \neq \emptyset$), se tiene entonces que $A \cup X = A \cup Y \Leftrightarrow A \cup A = A \cup \emptyset \Leftrightarrow A = A$, lo cual es correcto, y se concluye la demostración.

**P2** $\Rightarrow$ Se sabe por propiedad del apunte que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, con esto se tiene que

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$\Leftarrow$ Se sabe que $A \cap B \subseteq A$ y que $A \cap B \subseteq B$

$$\begin{aligned} & A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \wedge A \cap B \in P(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \cap P(B) \\ \Rightarrow\ & A \cap B \in \{\emptyset\} \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ se tiene lo pedido ($A \cap B = \emptyset$).

**P3** **(1)** $A \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \cap A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

**(2)** $A^c, B^c \in \mathcal{F}$, luego $A^c \circledast B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c)^c \cap (B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ .

**(3)** Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$, por (1), se tiene que $(A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

**(4)** Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$ y $(A \cap B) \in \mathcal{F}$, se tiene que $(A^c \cap B^c) \circledast (A \cap B) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \triangle B \in \mathcal{F}$.

**(5)** $A, A^c \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$, como $\emptyset \in \mathcal{F}$, por (1), $\emptyset^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \in \mathcal{F}$.

**P4** **(a)** Como $x$ siempre pertenece a $E$ se tiene que $\delta_E(x) = 1$, como $x$ nunca pertenece a $\emptyset$ se tiene que $\delta_\emptyset(x) = 0$.

**(b)** Tenemos 4 casos:

- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \in A$ y $x \in B$, con lo cual $x \in A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 1$.
- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \in A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.
- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \notin A$ y $x \in B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.

- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \notin A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.

Se concluye que $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x)$.

**(c)** $\Rightarrow$ Si $x \in C, \delta_C(x) = 1$, pero como $C \subseteq D \Rightarrow x \in D, \delta_D(x) = 1$. Si $x \notin C, \delta_C(x) = 0$, luego $\delta_D(x) = 0$ o 1, en cualquier caso se tiene que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

$\Leftarrow$ Tomando $x \in C, \delta_C(x) = 1$ debido a que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$,$\delta_D(x) = 1 \Rightarrow x \in D$.

# 6. Semana 5

**P1** Para $f$

- Inyectiva: $(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2)$ en efecto, sean $n_1, n_2$ arbitrarios $f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_2} \Leftrightarrow n_1 = n_2$.
- Sobreyectiva: $(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(f(n) = y)$, notemos que esto no es cierto, si, por ejemplo, tomamos $y = 20$ (claramente es racional), deberiamos tomar un $n = \frac{1}{40}$ de esta manera $f(n) = \frac{1}{\frac{2}{40}} = 20 = y$, sin embargo, $\frac{1}{40} \notin \mathbb{N}$, luego no es sobreyectiva.

Para $g$

- Inyectiva: $(\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q})(g(q_1) = g(q_2) \Rightarrow q_1 = q_2)$ en efecto, sean $q_1, q_2$ arbitrarios $g(q_1) = g(q_2) \Leftrightarrow \frac{q_1}{2} = \frac{q_2}{2} \Leftrightarrow q_1 = q_2$.
- Sobreyectiva: $(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists q \in \mathbb{Q})(g(q) = y)$, en efecto, basta tomar $q = 2y$, con esto se tiene que $g(q) = g(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

Con esto se concluye que solamente $g$ es biyectiva.

*Nota: Por lo general, no siempre se entiende la sobreyectividad en un principio, recordemos que existen 2 conjuntos en las funciones (de partida y de llegada), la sobreyectividad nos pide que, para CUALQUIER elemento del conjunto de llegada, debemos encontrar un elemento en la partida, tal que al evaluarlo en la función, nos dé como resultado ese elemento cualquiera de la llegada, veamos el siguiente ejemplo para demostrar epiyectividad* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = 3x + 8$ *por ejemplo, si queremos obtener el valor 8 como resultado en el conjunto imagen (de llegada), ¿Cuál elemento tomamos en el conjunto de partida? Debemos tomar el* $x = 0$ *ya que* $f(0) = 3\cdot 0 + 8 = 8$, *para 9, tomamos* $x = \frac{1}{3}$ *ya que* $f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 8 = 9$ *y así... Pero en sobreyectividad, se requiere encontrar un elemento en el conjunto de partida, dado un* $y$ *CUALQUIERA del conjunto de llegada, (de ahí el cuantificador* $\forall y$ *) entonces, ¿Cuál elemento hay que tomar?, lo que se hace es despejar la función, así como sacar la inversa, aún cuando no se haya demostrado que la posea, eso fue lo que se hizo implícitamente para los dos ejemplos anteriores, se resolvieron las ecuaciones* $8 = 3x + 8$ *y* $9 = 3x + 8$ *donde nos dio los resultados 0 y* $\frac{1}{3}$ *respectivamente. Entonces para un* $y$ *cualquiera se resuelve la siguiente ecuación* $y = 3x + 8$ *lo que nos da como resultado* $x = \frac{y-8}{3}$ *con esto* $f(x) = f\left(\frac{y-8}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y-8}{3} + 8 = y$ *con esto vimos que encontramos para un elemento cualquiera del conjunto de llegada, otro elemento del conjunto de partida que nos permite llegar a dicho valor arbitrario, con lo que se demuestra sobreyectividad.*

**P2** **(a)** Si se despeja $x$ en función de $f(x) = y$ la expresión queda

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ yx - 2y &= 2x+1 \\ yx - 2x &= 2y+1 \\ x &= \frac{2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Se observa entonces que el conjunto imagen (los $y$) pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ excepto el 2 ya que en ese caso no está definido el $x$ que tomar.

**(b)** $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ en efecto, sean $x_1, x_2$ arbitrarios $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-2} = \frac{2x_2+1}{x_2-2} \Leftrightarrow (2x_1+1)(x_2-2) = (2x_2+1)(x_1-2) \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 = 2x_1x_2 - 4x_2 + x_1 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

**(c)** Notemos que el dominio no cambia y además $f(x) = g(x)$, luego de la parte (b) se tiene la inyectividad, falta solamente demostrar la epiyectividad.

- Epiyectiva: $(\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(\exists x \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(f(x) = y)$ en efecto, dado el despeje realizado de la parte (a), sea un $y$ cualquiera real distinto de 2, bastaría tomar $x = \frac{2y+1}{y-2}$. Con esto se tiene que $f(x) = \frac{2\frac{2y+1}{y-2}+1}{\frac{2y+1}{y-2}-2} = y$. Una vez demostrado que la inversa existe el cálculo de ésta es despejar $x$ en función de $y$, luego se intercambian $y$ por $x$. (En realidad esto último no es tan necesario porque las variables son arbitrarias).

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ yx - 2y &= 2x+1 \\ yx - 2x &= 2y+1 \\ x &= \frac{2y+1}{y-2} \\ y &= \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{cambio de } x \text{ por } y \\ f^{-1}(x) &= \frac{2x+1}{x-2} \end{aligned}$$

**P3** Lo difícil del problema es entenderlo, la resolución es sumamente sencilla, lo primero se define un conjunto $L_{a,b}$ que contiene todos los puntos en el plano tales que $a$ es pendiente y $b$ es coeficiente de posición (en el fondo ese conjunto $L$ es una recta) y luego un conjunto $\mathcal{L}$ que contiene estas rectas, por ejemplo $L_{2,1}, L_{5,3}$. El conjunto $\mathcal{H}$ son pares ordenados de rectas, tales que dicho par debe intersectarse y no pueden ser las mismas rectas. La función lo que hace es sacar un par ordenado de $\mathcal{H}$ y entregarnos otro par ordenado (pero de números reales), que corresponde al punto de intersección de las rectas. Se pide demostrar que es sobreyectivo, es decir, encontrar para cualquier par ordenado $(x_0, y_0)$ pares de rectas $(L_1, L_2)$

tales que al intersectarlas nos entregue como resultado $(x_0, y_0)$, como se habrán percatado, existen infinitos pares de rectas que hacen esto, y como nos piden al menos un par, tomemos el mas simple $L_1 = x_0$ y $L_2 = y_0$ (recta vertical y horizontal), con esto se concluye lo pedido.

**P4** **(a)**

$$\begin{aligned} f(f(X)) &= A \cap (B \cup [A \cap (B \cup X)]) \\ &= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup X)) \\ &= A \cap (B \cup A) \cap (B \cup X) \\ &= A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

Recordemos que $[A \cap (B \cup A)] \subseteq A$ pero también $A \cap (B \cup A) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap A) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup A$, luego $A \subseteq [(A \cap B) \cup A]$, juntando ambas expresiones se tiene que $[A \cap (B \cup A)] = A$.

**(b)** Si no es inyectiva entonces $(\exists X_1, X_2 \in P(U))(f(X_1) = f(X_2) \wedge X_1 \neq X_2)$ , Se analizarán 3 casos:

- Tanto $A \neq E$ como $B \neq \emptyset$ se cumplen, para eso tomemos $X_1 = E$ y $X_2 = B^c$, se tiene que $f(X_1) = A \cap (B \cup E) = A$ y $f(X_2) = A \cap (B \cup B^c) = A$, luego encontramos $X_1$ y $X_2$ tales que $f(X_1) = f(X_2)$ y además $X_1 \neq X_2$, por lo tanto, no es inyectivo.
- Se cumple $A \neq E$ pero $B \neq \emptyset$ no, es decir, $B = \emptyset$ para eso tomemos $X_1 = \emptyset$ y $X_2 = A^c$, se tiene que $f(X_1) = A \cap (\emptyset \cup \emptyset) = \emptyset$ y $f(X_2) = A \cap (\emptyset \cup A^c) = \emptyset$, luego no es inyectivo.
- Se cumple $B \neq \emptyset$ pero $A \neq E$ no, es decir, $A = E$, para esto basta tomar los mismos conjuntos que en el primer caso.

**(c)** Si no es sobreyectiva entonces $(\exists Y \in P(E))(\forall X \in P(E))(f(X) \neq Y)$, notemos que para $Y = E$, como $A \neq E$ es imposible encontrar un $X$ tal que $f(X) = E$, ya que $A$ necesariamente es más chico que $E$, sin importar con que conjunto $(B \cup X)$ se intersecte, el resultado no podrá llegar a valer $E$.

# 7. Semana 6

**P1** Por definición de conjunto preimagen

$$g^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{x \in \mathbb{Q} \ \mid \ \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\right\} = \{2x \ \mid \ x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{x \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \ \mid \ \frac{1}{4x} \in \mathbb{Z}\right\} = \emptyset$$

**P2** Sea $y \in f(A)\backslash f(B)$ esto significa por definición que

$$\begin{aligned} & y \in f(A)\backslash f(B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in (f(A) \cap f(B)^c) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \wedge y \in f(B)^c \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in A)(f(x) = y) \wedge (\forall x \in B)(f(x) \neq y) \end{aligned}$$

Esto último quiere decir que $(\exists x \in A\backslash B)(f(x) = y)$ ya que si $x$ estuviera en $B$ contradice que $(\forall x \in B)(f(x) \neq y)$. Con lo anterior se deduce que $y \in f(A\backslash B)$ y con esto $y \in f(A)\backslash f(B) \Rightarrow y \in f(A\backslash B)$, $f(A)\backslash f(B) \subseteq f(A\backslash B)$, de manera análoga $f(B)\backslash f(A) \subseteq f(B\backslash A)$, finalmente uniendo ambas expresiones y recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(A)\backslash f(B) \cup f(B)\backslash f(A) &\subseteq f(A\backslash B) \cup f(B\backslash A) \\ f(A) \triangle f(B) &\subseteq f((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) \\ f(A) \triangle f(B) &\subseteq f(A \triangle B) \end{aligned}$$

Si es inyectiva, bastaría probar que $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$, en efecto, sea $y \in f(A\backslash B)$ entonces existe un $x$ en $A\backslash B$ tal que $f(x) = y$, por tanto, $y \in f(A)$, no puede haber otro $\overline{x} \in B$ tal que $f(\overline{x}) = y$ ya que de ser así no sería inyectivo, luego $y \notin f(B)$ y se concluye que $y \in f(A\backslash B) \Rightarrow y \in f(A)\backslash f(B)$, $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$ de manera análoga $f(B\backslash A) \subseteq f(B)\backslash f(A)$. Dicho esto, se tiene $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$ y $f(B\backslash A) \subseteq f(B)\backslash f(A)$, uniendo ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} f(A\backslash B) \cup f(B\backslash A) &\subseteq f(A)\backslash f(B) \cup f(B)\backslash f(A) \\ f((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) &\subseteq f(A) \triangle f(B) \\ f(A \triangle B) &\subseteq f(A) \triangle f(B) \end{aligned}$$

Con esto y usando la parte anterior se tiene que $f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$.

**P3** Recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

$$\begin{aligned} f(B)\backslash f(A) &= \emptyset \\ f(B) \cap f(A)^c &= \emptyset \qquad \backslash \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap (f(A)^c \cup f(A)) &= \emptyset \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap U &= f(A) \\ f(B) \cup f(A) &= f(A) \\ f(B \cup A) &= f(A) \end{aligned}$$

**P4** **(a)** La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Sea $p \in \mathcal{P}$ se sabe que $(p \Leftrightarrow (p \wedge p)) \Leftrightarrow p\mathcal{R}p$.
- Antisimétrica: Sean $p, q \in \mathcal{P}$ Como $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$, además $q\mathcal{R}p \Leftrightarrow ((q \wedge p) \Leftrightarrow p)$, juntando ambas expresiones se tiene que $p \Leftrightarrow (q \wedge p) \Leftrightarrow q$, luego $p \Leftrightarrow q$ y por definición $p = q$.
- Transitiva: Sean $p, q, r \in \mathcal{P}$ tales que $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}r$, se tiene que $(q \wedge r) \Leftrightarrow r$ , pero como $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$, significa que $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow r$, lo que lleva a $(p \wedge r) \Leftrightarrow r \Leftrightarrow p\mathcal{R}r$.

Luego la relación es de orden.

**(b)** Si es de orden total se debe cumplir que $p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p$

$$
\begin{aligned}
& p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge q) \Leftrightarrow q] \vee [(q \wedge p) \Leftrightarrow p] \\
\Leftrightarrow\ & [((p \wedge q) \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \wedge q))] \vee [((q \wedge p) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (q \wedge p))] \\
\Leftrightarrow\ & [q \Rightarrow (p \wedge q)] \vee [(p \Rightarrow (q \wedge p)] \\
\Leftrightarrow\ & \overline{q} \vee (p \wedge q) \vee \overline{p} \vee (q \wedge p) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{q} \vee \overline{p} \vee (p \wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{(q \wedge p)} \vee (p \wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}
$$

**P5** La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Claramente $(\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_1y) \Leftrightarrow R_1 \Omega R_1$.
- Antisimétrica: Sean $R_1, R_2 \in A$

$$
\begin{aligned}
& R_1 \Omega R_2 \wedge R_2 \Omega R_1 \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_1y) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_1y)] \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Leftrightarrow xR_2y) \\
\Leftrightarrow\ & R_1 = R_2
\end{aligned}
$$

- Transitiva: Sean $R_1, R_2, R_3 \in A$

$$
\begin{aligned}
& R_1 \Omega R_2 \wedge R_2 \Omega R_3 \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_3y) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_3y)] \\
\Rightarrow\ & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_3y) \qquad \backslash\text{transitividad en proposiciones} \\
\Leftrightarrow\ & R_1 \Omega R_3
\end{aligned}
$$

Luego la relación es de orden, para ver si es parcial, entonces hay que encontrar 2 relaciones $R_1, R_2 \in A$ tales que $R_1 \not\Omega R_2 \wedge R_2 \not\Omega R_1$, pensemos por ejemplo $xR_1y$ : si $x$ e $y$ dividen a 6 y $xR_2y$ : si 6 divide a $x$ e $y$, podemos ver entonces que $R_1 \not\Omega R_2$, basta tomar $x = 2$ e $y = 3$, y también $R_2 \not\Omega R_1$, basta tomar $x = 18$ e $y = 24$, luego la relación es de orden parcial.

# 8. Semana 7

**P1** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in A$, dada la propiedad de $f$ si se toma $k = n$ se tiene que $f^{(n)}(x) = x \Leftrightarrow xRx$.
- Simétrica: Sean $x, y \in A$, como $xRy$ existe un $k_1$ tal que $f^{(k)}(x) = y$, luego componiendo la funcion $n-k$ veces se tiene que $f^{(n-k+k)}(x) = x = f^{(n-k)}(y) \Leftrightarrow yRx$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in A$, como $xRy$ existe un $k$ tal que $f^{(k_1)}(x) = y$, y también como $yRz$ existe un $k_2$ tal que $f^{(k_2)}(y) = z$, si $f^{(k_1)}(x) = y$ se compone $k_2$ veces se obtiene $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(k_2)}(y) = z \Leftrightarrow xRz$ existe la posibilidad que $2n > k_1+k_2 > n$ en ese caso en vez de tomar $k_1 + k_2$ se toma $k_1 + k_2 - n$, en donde claramente $k_1 + k_2 - n < n$ y además $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = f^{(k_1+k_2-n)}(x) = z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** **b.1** Para $n = 3$ se tiene $f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = f^{(2)}(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3)$

**b.2** $[(0,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \ \mid \ (0,0,0)R(x,y,z)\} = \{(0,0,0)\}$
$[(1,1,1)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,1,1)R(x,y,z)\} = \{(1,1,1)\}$
$[(1,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,0,0)R(x,y,z)\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$[(1,1,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,1,0)R(x,y,z)\} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

**P2** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $X \in P(E)$, claramente $A \cap X = A \cap X \Leftrightarrow X\mathcal{R}X$.
- Simétrica: Sean $X, Y \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$.
- Transitiva: Sean $X, Y, Z \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y$ y $Y\mathcal{R}Z$ se tiene que $A \cap X = A \cap Y = A \cap Z \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X\mathcal{R}Z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** Primero demostraremos que $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, es claro que $A \subseteq E$ luego $P(A) \subseteq P(E)$ y con esto $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, para la otra inclusión tomamos un $C \in P(E)/\mathcal{R}$ esto quiere decir que $C = [M]$ con $M \in P(E)$, si tomamos un conjunto $X = A \cap M$, se puede ver que $X\mathcal{R}M$, en efecto

$$\begin{aligned} X &= A \cap M \qquad \backslash\text{intersectando con } A \\ A \cap X &= A \cap A \cap M \\ A \cap X &= A \cap M \\ \Leftrightarrow X\mathcal{R}M & \end{aligned}$$

Pero como $X \subseteq A$ $(A \cap M \subseteq A)$, quiere decir que $X \in P(A)$, además dado $X\mathcal{R}M$ significa que $C = [M] = [X]$ con $C \in \{[X]/X \in P(A)\}$.

**(c)** Por contrarecíproca, como $[X] = [Y]$ esto quiere decir que $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$, pero además $X, Y \in P(A)$, luego $X \subseteq A$ e $Y \subseteq A$, lo que significa que $X = A \cap X$ y que $Y = A \cap Y$, juntando ambas ecuaciones resulta que $X = Y$.

**P3** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $(a_1, a_2) \in A$, tomando $k = 0$, es lo mismo que $2 \cdot 0 = a_1 + a_2 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Simétrica: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$, como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, reordenando la expresión: $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \Leftrightarrow -(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) = 2k \Leftrightarrow b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2(-k)$, llamando $k' = -k$, que claramente es entero, tenemos que $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2k' \Leftrightarrow (b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Transitiva: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ y $(b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2) \Leftrightarrow b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2j$ con $k, j \in \mathbb{Z}$ Sumando ambas expresiones tenemos como resultado $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2(k + j)$ llamando $m = k + j$ que claramente es entero porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2m \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (0,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = -2k\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es par, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,par) o (impar, impar), (números de igual paridad).

$$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (1,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = -2k + 1\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es impar, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,impar) o (impar, par), (números de distinta paridad).

**(c)** Es claro que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} \subseteq A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (los pares ordenados fueron sacados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), falta demostrar la otra inclusión: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ En efecto, sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dicho par ordenado puede tener algunas de estas 4 combinaciones posibles:

- (par,par), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,impar), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,par), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$
- (par,impar), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$

Luego con esto se ha probado la inclusión que faltaba, se concluye que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**(d)** Lo que se pide encontrar acá es una función tal que lleve los números $(x,y)$ de distinta paridad a tener la misma paridad, entendiendo esto, bastaría una función $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ tal que $(x,y) \to f(x,y) = (x+1,y)$, por ejemplo, si tomamos el par $(3,8)$ que está en $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$, al aplicarle la función quedaría $(3+1,8) = (4,8)$ que ahora pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, esta función es biyectiva, es de 2 variables, pero la pueden ver como dos funciones por separado $f_1(x) = x+1$ y $f_2(y) = y$ esto es debido a que las componentes de los pares ordenados son independientes entre sí, claramente $f_1$ y $f_2$ son biyectivas, luego $f$ es biyectiva.

**P4** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in Q_+$, tomando $\alpha = 0$ se tiene que $p^\alpha = 1 = \frac{x}{x} \Leftrightarrow x\Omega_p x$.
- Simétrica: Sean $x, y \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ reordenando se tiene $\frac{y}{x} = p^{-\alpha}$, luego eligiendo $\beta = -\alpha$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$, se tiene que $\frac{y}{x} = p^\beta \Leftrightarrow y\Omega_p x$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ e $y\Omega_p z \Leftrightarrow \frac{y}{z} = p^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , multiplicando ambas expresiones se tiene que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^{(\alpha+\beta)}$, eligiendo $\gamma = \alpha + \beta$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$ porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $\frac{x}{z} = p^\gamma \Leftrightarrow x\Omega_p z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[1]_{\Omega_2} = \{x \in Q_+ \mid 1\Omega_2 x\} = \{x \in Q_+ \mid x = 2^{-\alpha}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., 2, 4, 8...\right\}$$

**P5** **(a)**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{m} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=n}^{m} [\log(k+1) - \log(k)] \qquad \text{\textbackslash telescópica} \\
&= \log(m+1) - \log(n)
\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}}\left(2\left(i+\frac{m(m-1)}{2}\right)-1\right) && \text{\textbackslash cambio de índice}\\
&= \sum_{i=1}^{m}(2i+m(m-1)-1)\\
&= \sum_{i=1}^{m}2i+\sum_{i=1}^{m}m(m-1)-\sum_{i=1}^{m}1\\
&= 2\sum_{i=1}^{m}i+m(m-1)\sum_{i=1}^{m}1-\sum_{i=1}^{m}1 && \text{\textbackslash las constantes salen}\\
&= 2\cdot\frac{m(m+1)}{2}+m(m-1)m-m && \text{\textbackslash sumas conocidas}\\
&= m^2+m+m^3-m^2-m\\
&= m^3
\end{aligned}$$

**(c)**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} && \text{\textbackslash racionalizar}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] && \text{\textbackslash telescópica}\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

**P6**
- Caso base ($n=1$): $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\leq\frac{5}{6}$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}\leq\frac{5}{6}$, para cierto $n\geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{n+1+k}\leq\frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} && \backslash\text{cambio de índice} \\
&= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} && \backslash\text{sumar } 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} && \backslash\text{incorporar el término } \frac{1}{n+1} \text{ en la sumatoria} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} && \backslash\text{soltar últimos 2 términos} \\
&\leq \frac{5}{6} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} && \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\
&\leq \frac{5}{6} && \backslash -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \text{ es siempre menor que } 0
\end{aligned}$$

**P7** **(a)** $(f*f)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$

$(f*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$

$(g*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot (n-k) = \sum_{k=0}^{n} nk - \sum_{k=0}^{n} k^2 = n\sum_{k=0}^{n} k - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n^2-1)}{6}.$

**(b)** $n!(f*g)(n) = n!\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n.$

**P8** **(a)**
- Caso base ($k=1$): $H_{2^1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1+1$ .
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $H_{2^k} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \leq 1+k$, para cierto $k \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto

- PDQ $H_{2^{k+1}} = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \leq 1 + k + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} &= \sum_{i=1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1+2^k}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} && \backslash\text{separar suma en 2} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} && \backslash\text{cambio de índice} \\
&\leq 1 + k + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} && \backslash\text{hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Fijarse que

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} = \frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + ... + \frac{1}{2^k+2^k}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} \\
\frac{1}{2+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} && \backslash\text{hacer multiplicación cruzada para verlo} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^k+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k}
\end{aligned}$$

Sumando todo queda:

$$\frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + ... + \frac{1}{2^k+2^k} \leq \underbrace{\frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{1+2^k} + ... + \frac{1}{1+2^k}}_{2^k \text{ veces}}$$

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \leq \frac{2^k}{2^k+1} \leq 1 \ \backslash\text{multiplicación cruzada para verlo}$$

Retornando a la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} &\leq 1 + k + + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \\
&\leq 1 + k + 1
\end{aligned}$$

**(b)**

- Caso base ($n=1$): $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1$, pero $H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$, luego $H_1 = (1+1)H_1 - 1 = (1+1) - 1 = 1$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $\sum_{i=1}^{n+1} H_i = (n+1+1)H_{n+1} - (n+1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} H_i &= \sum_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} \\
&= (n+1)H_n - n + H_{n+1} \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - n + H_{n+1} \qquad \backslash\text{definición de } H_n \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + 1 - 1 - n + H_{n+1} \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{n+1}{n+1} - 1 - n + H_{n+1} \qquad \backslash 1 = \frac{n+1}{n+1} \\
&= (n+1)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1}\right] - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - 1 - n + H_{n+1} \qquad \backslash\text{incorporar } \frac{1}{n+1} \text{ a la sumatoria} \\
&= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+2)H_{n+1} - (n+1)
\end{aligned}$$

# 9. Semana 8

**P1** Expandimos de la doble sumatoria redefiniéndola como sigue

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:i+j \text{ es par}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$$

Tal que $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $i+j$ es par y $b_{i,j} = 0$ si $i+j$ es impar, luego tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:i+j \text{ es par}} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i:i+j \text{ es par}} b_{i,j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i:i+j \text{ es impar}} b_{i,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i:i+j \text{ es par}} a_{i,j}\end{aligned}$$

**P1** Expandimos de la doble sumatoria redefiniéndola como sigue

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:j=0 \text{ mód } i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$$

Tal que $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $j$ mód $i$ y $b_{i,j} = 0$ si no

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \text{ mód } i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ mód } i} b_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ no mód } i} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ mód } i} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j=i*k \quad k\in\mathbb{Z}} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} a_{i,j}
\end{aligned}$$

**P3** Notando que $|A| = \left|\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C\right| = \sum_{C\in\mathcal{C}} |C|$. Lo anterior debido a que los conjuntos en $\mathcal{C}$ son disjuntos (una partición de $A$) y, en consecuencia, usando la proposición 7.11 se concluye lo pedido.

**P4** Recordar que las funciones epiyectivas son aquellas que toman todos los elementos del codominio. Dicho esto, supongamos que $|A| = n$, el problema de encontrar funciones epiyectivas es simplemente un problema combinatorial, de los $n$ elementos del dominio, extraigo $k$ de ellos cuya imagens será 1, por otra parte, dado que es epiyectivo, $n-k$ tendrán imagen 0. Extraer $k$ elementos en $n$ es $\binom{n}{k}$ y eso se hace para $k \in \{1, ..., n-1\}$. Dicho esto se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 2 \\
&= 2^n - 2 \\
&= 2^{|A|} - 2
\end{aligned}$$

**P5** a)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} |A_i \cap A_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Lo último debido a que el cardinal de intersección es siempre mayor o igual que 0

b) $\Leftarrow$

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|\emptyset|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}0\\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j|$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j| = 0$$

$$|A_i\cap A_j| = 0 \quad \forall i,j\in[1,n], i\neq j$$

**P6** Probaremos que es biyección, es decir, inyectiva y epiyectiva

- Inyectiva: $\forall x_1, x_2 \in \{0,1\}^A$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En efecto, sean $x_1, x_2$ funciones arbitrarias que van desde $A$ a $\{0,1\}$, si $f(x_1) = f(x_2)$ quiere decir que $x_1^{-1}(\{1\}) = x_2^{-1}(\{1\}) = A'$ (Preimágenes iguales), además como $x_1$ y $x_2$ son funciones necesariamente $x_1^{-1}(\{0\}) = x_2^{-1}(\{0\}) = A''$ (notar que $A'\cup A'' = A$), por lo que si tomamos un elemento $a\in A'$ tenemos que $x_1(a) = x_2(a) = 1$, por otra parte si tomamos un elemento $a \in A''$ tenemos que $x_1(a) = x_2(a) = 0$, por lo que las funciones son iguales.
- Epiyectiva $\forall B \in \mathcal{P}(A)$ $\exists x \in \{0,1\}^A$ tal que $f(x) = B$, en efecto, dado $B\subseteq A$, si elegimos la función definida como $x : A \to \{0,1\}$ tal que $x(a) = 1$ si $a\in B$ y $x(a) = 0$ si $a \in A\backslash B$, se tiene que $f(x) = \{a\in A | x(a) = 1\} \Leftrightarrow f(x) = x^{-1}(\{1\}) = B$

Concluimos que la función $f$ es biyectiva

**P7** Primero hay que notar que $A$ es finito, la idea del problema es que la secuencia, que es infinita, va sacando elementos de este conjunto, nos piden demostrar que existirá algún momento en que estos elementos se van a repetir en la secuencia (lo cual es lógico). A modo ilustrativo, pensemos en $A = \{1,2,3,4,5\}$, tomemos una secuencia aleatoria $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, ...) = (2,4,5,3,2,4,1,3,...)$, claramente encontramos $1, 5 \in \mathbb{N}, 1 \neq 5$ tales que $x_1 = x_5$ $(4 = 4)$. La demostración es explicar esto mismo por contradicción, supongamos que para todo

$l, j \in \mathbb{N}, l \neq j$ $x_j \neq x_l$, pero $A$ tiene $n$ elementos y la secuencia es infinita, luego es imposible que no se repitan, entonces se concluye por contradicción que hay $l, j \in \mathbb{N}, l \neq j$ tales que $x_j = x_l$.

# 10. Semana 9

**P1**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(1+4+4^2+...+4^{k-1})\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}4^i\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k-1}{4-1}\right)\binom{n}{k} \qquad \text{\geométrica} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(4^k\binom{n}{k}-\binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}4^k\binom{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1-1-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \qquad \text{\sumar 0} \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right] \qquad \text{\agregar primer término} \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k\cdot 1^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}\right] \qquad \backslash 1^{n-k}=1 \\
&= \frac{1}{3}\left[(4+1)^n-(1+1)^n\right] \qquad \text{\binomio} \\
&= \frac{5^n-2^n}{3}
\end{aligned}$$

**P2**

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\right) && \backslash\text{salida de constantes}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\cdot 1^{i-k}\right) && \backslash 1^{i-k}=1\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(8+1\right)^i && \backslash\text{binomio}\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}3^i\right)\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3^{j+1}-3}{3-1}\right) && \backslash\text{geométrica}\\
&= 4\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j+1}-\sum_{j=1}^{n}3\right]\\
&= 12\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j}-\sum_{j=1}^{n}1\right]\\
&= 12\left[\frac{3^{n+1}-3}{3-1}-n\right] && \backslash\text{geométrica}\\
&= 6(3^{n+1}-3)-12n
\end{aligned}$$

**P3**

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k &= \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} && \backslash\text{geométrica}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k\cdot 1^{n+1-k}}{x} && \backslash\text{binomio}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x} && \backslash 1^{n+1-k}=1\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+\binom{n+1}{0}(-x)^0)}{x} && \backslash\text{soltar primer término}\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+1)}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^{k+1}}{x} && \backslash\text{cambio de índice}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k(-x)}{x}\\
&= \frac{x\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k}{x}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(x)^k(-1)^k
\end{aligned}
$$

**P4**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k7^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k7^k \binom{n}{k} && \backslash\text{soltar primer término} = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k7^k n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{7^k n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!(n-(k+1))!} && \backslash\text{cambio de índice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} (n-1)!}{k!((n-1)-k)!} && \backslash\text{definición factorial } n! = n(n-1)! \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k+1} \\
&= 7n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k} \cdot 1^{n-1-k} && \backslash 1^{n-1-k} = 1 \\
&= 7n(7+1)^{n-1} && \backslash\text{binomio} \\
&= 7n8^{n-1}
\end{aligned}$$

**P5 (a)**

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{((n-k)-(i-k))!(i-k)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}
\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} && \backslash\text{usando parte anterior}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k} && \backslash\text{constantes salen}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i} && \backslash\text{cambio de índice}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}1^{n-k-i}1^{i} && \backslash 1^{n-k-i}=1\\
&= \binom{n}{k}(1+1)^{n-k} && \backslash\text{binomio}\\
&= \binom{n}{k}2^{n-k}
\end{aligned}$$

**P6** **(a)** Vamos a dividir o "particionar" $C$ en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos $n$ y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$C = \begin{cases} C_1 = & \{x \in [0,+\infty), x \in \mathbb{N}\} = \{1,2,3,4...\} \\ C_2 = & \{x \in [0,+\infty), x^2 \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}...\right\} \\ \vdots & \\ C_n = & \{x \in [0,+\infty), x^n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{4}...\right\} \end{cases}$$

Para cada $C_n$ podemos establecer la siguiente función $f_n : C_n \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$, por ejemplo, para $C_2 : f\left(\sqrt{2}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2, f\left(\sqrt{3}\right) = (\sqrt{3})^2 = 3, f\left(\sqrt{4}\right) = (\sqrt{4})^2 = 4$. Cada una de estas funciones $f_n$ son claramente biyectivas, con esto $|C_1| = |C_2| = ... = |C_n| = |\mathbb{N}|$ es numerable. Luego $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

**(b)** Vamos a dividir o "particionar" $A$ en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos $i$ y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3}\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\} \\ A_2 = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^2}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{9}\frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, ...\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^n}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3^n}\frac{-1}{3^n}, 0, \frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Para cada $A_n$ podemos establecer la siguiente función $f_n : A_n \to \mathbb{Z}$ $f(x) = k$, por ejemplo, para $A_1 : f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2, f\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$. Cada una de estas funciones $f_n$ son claramente biyectivas, con esto $|A_1| = |A_2| = ... = |A_n| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ es numerable.

Luego $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

**(c)** Si una recta no vertical pasa por (0,1) y corta al eje $OX$ en coordenada racional $(q, 0)$, entonces es de la forma $l : y = \frac{-x}{q} + 1$, con $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos $L$ al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L : \left\{y = \frac{-x}{q} + 1/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Podemos entonces establecer la siguiente función $f : L \to \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ $f(l_1) = q$, es decir, que a cada recta le asocio la coordenada $x$ del punto que corta al eje $OX$ (vendría siendo $q$). Es inyectiva ya que las rectas en este conjunto se diferencian justamente por el punto de corte en el eje $OX$ (si dos rectas tienen distinto $q$, son distintas entre si), además es sobreyectiva ya que para cada $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ basta tomar la recta que corte en el eje $OX$ en el punto $(q, 0)$. Como es biyectiva se concluye que $|L| = |\mathbb{Q}\backslash\{0\}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ y, por lo tanto, es numerable.

**(d)** Las recta no vertical que no pasa por el origen y corta los ejes en coordenadas racionales es de la forma $y = \frac{-p}{q}(x - q)$ con $p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos $L$ al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L$ : $\left\{y = \frac{-p}{q}(x - q)/p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Luego podemos hacer la siguiente división del conjunto $L$, fijando $p$

$$L = \begin{cases} L_1 = & \left\{y = \frac{-1}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ L_2 = & \left\{y = \frac{-2}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ \vdots & \\ L_p = & \left\{y = \frac{-p}{q}(x-q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \end{cases}$$

Por la parte (a) se sabe que $L_1, L_2, ..., L_n$ son numerables, luego $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

**(e)** Vamos a dividir o "particionar" $A$ en una colección infinita (numerable) de conjuntos, primero fijamos $i$ y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{\frac{p}{2} \ \mid \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ A_2 = & \left\{\frac{p}{2^2} \ \mid \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^2\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{\frac{p}{2^n} \ \mid \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^n\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Notar que cada uno de estos conjuntos es finito y no vacío, luego utilizando la indicación $A$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos no vacíos.

**(f)** Primero notemos que $E$ contiene todas las tuplas con una cantidad par de componentes, dichas cantidades pueden ser solamente 1 o -1, y su suma da 0, es decir, el conjunto es de la forma:

$$E = \{(1, -1), (-1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), ...\}$$

Para demostrar que es infinito basta ver que para cada natural tomamos una tupla, en efecto

$$E = \begin{cases} n=1 & \text{tomamos } a=(-1,1), a\in\{-1,1\}^2 \\ n=2 & \text{tomamos } a=(-1,1,1,-1), a\in\{-1,1\}^4 \\ \vdots & \\ n=n & \text{tomamos } a=(-1,1,...,-1,1), a\in\{-1,1\}^{2n} \end{cases}$$

Luego para cada natural existe un elemento en $E$, se concluye que es infinito. El conjunto E se puede ver como la unión de los siguientes conjuntos.

$$E = \begin{cases} E_1 = \{a=(a_1,a_2), a\in\{-1,1\}^2, \sum_{k=1}^{2} a_k = 0\} \\ E_2 = \{a=(a_1,a_2,a_3,a_4), a\in\{-1,1\}^4, \sum_{k=1}^{4} a_k = 0\} \\ \vdots \\ E_n = \{a=(a_1,...,a_n), a\in\{-1,1\}^{2n}, \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\} \end{cases}$$

Notemos que cada $E_n$ es finito, por ejemplo $E_1 = \{(-1,1),(1,-1)\}$, $|E_1| = 2$, por lo tanto $E$ es una unión de finitos ($|E| \leq |\mathbb{N}|$). De lo visto anteriormente se tiene que $|\mathbb{N}| \leq |E|$, con lo que juntando ambas expresiones se deduce que $E$ es numerable. Otra forma de ver esto es haciendo la siguiente biyección que asocia un natural con cada tupla de $E$.

$$\begin{aligned} 1 &\to (-1,1) \\ 2 &\to (1,-1) \\ 3 &\to (1,-1,1,-1) \\ 4 &\to (1,-1,-1,1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

**(g)** Notemos que como $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, necesariamente $x_1 \in \mathbb{Z}$, esto porque la suma de los tres debe dar un número natural, entonces $E$ puede ser descrito como el siguiente conjunto $E = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 / \exists n \in \mathbb{N}, x_1+x_2+x_3 = n\}$, se deduce que $E \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 \Rightarrow |E| \leq |\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, además si fijamos $x_1, x_2$, digamos en 0, existirá una tupla $(0,0,n)$ para cada natural $n$, con lo cual podemos deducir que el conjunto es infinito ($|\mathbb{N}| \leq |E|$), juntando ambas desigualdades se tiene que $|E| = |\mathbb{N}|$.

# 11. Semana 10

**P1** **(a)** Dividiremos $A$ en varios subconjuntos, si vemos que si encontramos al menos uno de ellos que no sea numerable entonces la unión en su totalidad tampoco será numerable, para esto fijemos $n = 1$ y $x_3 = 0$ con esto obtenemos un subconjunto de $A$, llamémoslo $A_1$, descrito de la siguiente manera $A_1 = \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 1\}$ Podemos establecer la siguiente función biyectiva $f : \mathbb{R} \times \{0\} \to A_1$ $f(x, y) = (x, 1 - x, y)$, dicha función se puede ver como la unión de 3 funciones distintas $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$ y $f_3(y) = y$, cada una de estas funciones es biyectiva, luego $f$ es biyectiva, se concluye que $|A_1| = |\mathbb{R}|$ y, por lo tanto, A es no numerable.

**(b)** Dividiremos $\mathcal{T}$ en varios subconjuntos, si vemos que si encontramos al menos uno de ellos que no sea numerable entonces la unión en su totalidad tampoco será numerable, si $T$ es un triángulo, se puede representar como 3 puntos o vértices en el plano cartesiano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, fijemos 2 de ellos, y una componente del último vértice, el primero en (0,0) y el segundo en (1,0), y la coordenada $x$ del tercer vértice en 0, con esto encontramos un nuevo conjunto $T'$ subconjunto de $\mathcal{T}$ de triángulos tales que 2 de sus vértices están fijos en (0,0) y (1,0) y el tercer vértice está libre solamente en la coordenada $y$, pero no puede valer 0 ya que de ser así no sería un triángulo. Establecemos entonces la siguiente biyección $f : T' \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f(t) = y$, donde a cada triángulo se le asocia la coordenada $y$ del tercer vértice del triángulo, claramente esta función es biyectiva (los triángulos en este conjunto se diferencian únicamente por su coordenada $y$ del tercer punto, luego es inyectivo, y para cada valor real $y$ distinto de 0 en el eje $OY$ existirá un triángulo cuya ordenada del tercer vértice toma ese $y$, con esto es epiyectiva, luego $|\mathbb{R}\backslash\{0\}| = |T'| = |\mathcal{T}| = |\mathbb{R}|$.

**P2** Si una recta no vertical pasa por (0,1) entonces es de la forma $l : y = mx + 1$, con $m \in \mathbb{R}$. Si llamamos $L$ al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L : \{y = mx + 1/m \in \mathbb{R}\}$. Podemos entonces establecer la siguiente función $f : L \to \mathbb{R}$ $f(l_1) = m$, es decir, que a cada recta le asocio su pendiente. Es inyectiva ya que las rectas en este conjunto se diferencian justamente por su pendiente (si dos rectas tienen distinto $m$, son distintas entre si), además es sobreyectiva ya que para cada $m \in \mathbb{R}$ basta tomar la recta que tenga a $m$ como pendiente. Como es biyectiva se concluye que $|L| = |\mathbb{R}|$ y, por lo tanto, no es numerable.

**P3** **(a)** Razonemos por contradicción, supongamos que $A\backslash B$ es numerable, luego $A\backslash B \cup B$ es numerable por ser unión finita de numerables, pero

$$\begin{aligned}
A\backslash B \cup B &= (A \cap B^c) \cup B \\
&= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\
&= (A \cup B) \cap U \\
&= A \cup B \\
&= A \qquad \backslash\text{ya que } B \subseteq A
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $A$ es numerable, lo que es una contradicción, se concluye que $A\backslash B$ es no numerable.

**(b)** Usando lo anterior sabemos que $\mathbb{R}$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$), luego $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ es no numerable.

**P5** **(a)** $(\mathcal{F}, *)$ es estructura algebraica si obedece la ley de composición interna. Sean $f, g \in \mathcal{F}$ se tiene que $f \circ g$ es biyectiva por ser composición de funciones biyectivas, además $(f \circ g)^{-1}$ es biyectiva ya que la inversa de una función biyectiva, es biyectiva. Se concluye que $(f \circ g)^{-1} = f * g \in \mathcal{F}$, luego cumple la ley de composición interna y, por lo tanto, es una estructura algebraica.

**(b)** Estudiemos $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$

$$(f * g) * h = (f \circ g)^{-1} * h = ((f \circ g)^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ ((f \circ g)^{-1})^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g).$$

$$f * (g * h) = f * (g \circ h)^{-1} = (f \circ (g \circ h)^{-1})^{-1} = ((g \circ h)^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = (g \circ h) \circ f^{-1}.$$

Pero $h^{-1} \circ (f \circ g) \neq (g \circ h) \circ f^{-1}$ se concluye que esta estrucura no es asociativa. Para convencerse tomemos 3 funciones cualesquiera, por ejemplo, $f(x) = x^2, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = e^x, h^{-1}(x) = \ln(x)$, luego $h^{-1} \circ (f \circ g) = \ln(\sin^2(x))$, pero $(g \circ h) \circ f^{-1} = \sin(e^{\sqrt{x}})$, las cuales son claramente distintas entre sí.

**(c)** Si existiese neutro $e$ debe cumplir que $(\forall f \in \mathcal{F})\ f * e = f$, pero

$$\begin{aligned}
f * e &= f \\
(f \circ e)^{-1} &= f \qquad \backslash\text{tomando inverso a ambos lados } ()^{-1} \\
f \circ e &= f^{-1} \qquad \backslash\text{componiendo con la inversa de } f \text{ por la izquierda } f^{-1}\circ \\
(f^{-1} \circ f) \circ e &= f^{-1} \circ f^{-1} \qquad \backslash\text{por asociatividad} \\
id_A \circ e &= f^{-2} \\
e &= f^{-2}
\end{aligned}$$

Sin embargo se observa que este neutro $e$ depende de la función $f$ elegida, se concluye que no existe neutro ya que debe ser único e igual para todos.

**(d)** Como no tiene neutro, tampoco existirá un inverso.

**(e)** Son idempotentes aquellos elementos en $\mathcal{F}$ tales que $f * f = f$, trabajando un poco la expresión se tiene que

$$\begin{aligned}
f * f &= f \\
(f \circ f)^{-1} &= f \qquad \backslash\text{tomando inverso a ambos lados } ()^{-1} \\
f \circ f &= f^{-1} \qquad \backslash\text{componiendo con } f \text{ por la izquierda } f \circ \\
f \circ f^2 &= f \circ f^{-1} \\
f^3 &= id_A
\end{aligned}$$

Es decir, los elementos idempotentes en $\mathcal{F}$ son aquellas funciones biyectivas que si se componen consigo mismo 3 veces resulta la identidad.

**P6** **(a)** Si tomamos $a \in [x]_{\mathcal{R}}$ y $b \in [y]_{\mathcal{R}}$, esto quiere decir que $a\mathcal{R}x$ y $b\mathcal{R}y$, pero por hipótesis esto implica que $(a * b)\mathcal{R}(x * y)$ es decir $(a * b) \in [x * y]_{\mathcal{R}}$, como se puede observar tomamos elementos arbitrarios de ambas clases de equivalencia y el resultado fue que la operación está bien definida ya que no depende de los representantes escogidos.

**(b)** Se debe encontrar una clase de equivalencia $m \in E/\mathcal{R}$ tal que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes m = [x]_{\mathcal{R}}$, dado que en $E$ hay un neutro $e$, podemos tomar su clase de equivalencia, luego $m = [e]_{\mathcal{R}}$, con esto se tiene que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes [e]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} \otimes [x]_{\mathcal{R}} = [x * e]_{\mathcal{R}} = [e * x]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}}$. Se concluye que $[e]_{\mathcal{R}}$ es el neutro para $E/\mathcal{R}$.

**(c)** Se debe encontrar una clase de equivalencia $m \in E/\mathcal{R}$ tal que $[x]_{\mathcal{R}} \oplus m = [e]_{\mathcal{R}}$, dado $x \in E$ como existe inverso $x^{-1}$, podemos tomar su clase de equivalencia, luego $m = [x^{-1}]_{\mathcal{R}}$, con esto se tiene que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes [x^{-1}]_{\mathcal{R}} = [x^{-1}]_{\mathcal{R}} \otimes [x]_{\mathcal{R}} = [x * x^{-1}]_{\mathcal{R}} = [x^{-1} * x]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}}$. Se concluye que $[x^{-1}]_{\mathcal{R}}$ es el inverso para $E/\mathcal{R}$.

# 12. Semana 11

**P1** Solamente basta demostrar que es conmutativo, utilizando la indicación tenemos que

$$\begin{aligned}(a*b)*(b*a) &= a*(b*b)*a \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ &= a*e*a\\ &= a*a\\ &= e\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(b*a)*(a*b) &= b*(a*a)*b \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ &= b*e*b\\ &= b*b\\ &= e\end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que $(a*b)^{-1} = b*a$, sin embargo, por la propiedad del enunciado, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento, es decir $(a*b)^{-1} = a*b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a*b = b*a$, se concluye que $(G,*)$ es grupo abeliano.

**P2** Como es grupo todo elemento posee inverso, supongamos que el inverso de $a$ no es $b$, esto quiere decir que $a*b \neq e$, lo que significa que $a*b = a$ o $a*b = b$, pero

$$\begin{aligned}a*b &= a \qquad \backslash\text{operando con el inverso de } a \text{ por la izquierda } a^{-1}*\\ (a^{-1}*a)*b &= a^{-1}*a \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ e*b &= e\\ b &= e\end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}a*b &= b \qquad \backslash\text{operando con el inverso de } b \text{ por la derecha } b^{-1}*\\ a*(b*b^{-1}) &= a*(b*b^{-1}) \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ a*e &= e\\ a &= e\end{aligned}$$

En ambos casos nos lleva a una contradicción, se concluye que $a^{-1} = b$.

**P3** **(a)** Si $(G \times H, \triangle)$ es grupo debemos demostrar asociatividad, existencia de neutro e inverso.

- Asociatividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a,b) \triangle [(c,d) \triangle (e,f)] &= (a,b) \triangle (c*e, d \circ f)\\ &= (a*(c*e), b \circ (d \circ f))\\ &= ((a*c)*e, (b \circ d) \circ f) \qquad \backslash\text{por asociatividad de } G \text{ y } H\\ &= (a*c, b \circ d) \triangle (e,f)\\ &= [(a,b) \triangle (c,d)] \triangle (e,f)\end{aligned}$$

- Neutro: El neutro es el par ordenado que contiene los neutros respectivos de cada grupo, en efecto, sean $(a,b),(e_G,e_H) \in G \times H$, se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b) \bigtriangleup (e_G,e_H) &= (a * e_G, b \circ e_H)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(e_G,e_H) \bigtriangleup (a,b) &= (e_G * a, e_H \circ b)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Se concluye que el neutro es $(e_G,e_H)$.

- Inverso: Sea $(a,b) \in G \times H$ y sean $a^{-1}$ y $b^{-1}$ los inversos de $a$ y $b$ en $G$ y $H$ respectivamente (existen porque $G$ y $H$ son grupos), tomando el par ordenado $(a^{-1},b^{-1}) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b) \bigtriangleup (a^{-1},b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \circ b^{-1})\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(a^{-1},b^{-1}) \bigtriangleup (a,b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \circ b)\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Se concluye que el inverso es $(a^{-1},b^{-1})$.

Con esto se tiene que $(G \times H, \bigtriangleup)$ es grupo.

**(b)** Para $\varphi$

- Morfismo: Sean $(a,b),(c,d) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi((a,b) \bigtriangleup (c,d)) &= \varphi(a * c, b \circ d)\\ &= a * c\\ &= \varphi(a,b) * \varphi(c,d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in G)(\exists x \in G \times H)(\varphi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (y,h)$, con esto se tiene que $\varphi(x) = \varphi(y,h) = y$.

Para $\psi$

- Morfismo: Sean $(a,b),(c,d) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\psi((a,b) \bigtriangleup (c,d)) &= \psi(a * c, b \circ d)\\ &= b \circ d\\ &= \psi(a,b) \circ \psi(c,d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in H)(\exists x \in G \times H)(\psi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (g, y)$, con esto se tiene que $\psi(x) = \psi(g, y) = y$.

**(c)** $\Rightarrow$ Sean $(a^{-1}, e), (b^{-1}, e) \in G \times G$ con $e$ el neutro en $G$, se tiene que como es morfismo $f((a^{-1}, e) \triangle (b^{-1}, e)) = f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e)$, pero $f((a^{-1}, e) \triangle (b^{-1}, e)) = f(a^{-1} * b^{-1}, e * e) = (a^{-1} * b^{-1} * e * e)^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1} = b * a$, por otro lado, $f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e) = (a^{-1} * e)^{-1} * (b^{-1} * e)^{-1} = (a^{-1})^{-1} * (b^{-1})^{-1} = a * b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a * b = b * a$.

$\Leftarrow$ Sean $(a, b), (c, d) \in G \times G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f((a, b) \triangle (c, d)) &= f(a * c, b * d) \\
&= (a * c * b * d)^{-1} \\
&= (a * b * c * d)^{-1} && \backslash \text{por ser grupo abeliano} \\
&= (c * d)^{-1} * (a * b)^{-1} \\
&= (a * b)^{-1} * (c * d)^{-1} && \backslash \text{por ser grupo abeliano} \\
&= f(a, b) * f(c, d)
\end{aligned}$$

**P4** $\Rightarrow$ Tomemos $h^{-1}, g^{-1} \in G$, se tiene que como $f$ es isomorfismo $f(h^{-1} * g^{-1}) = f(h^{-1}) * f(g^{-1}) = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = h * g$, por otro lado, por definición de la función y propiedad de inversos, $f(h^{-1} * g^{-1}) = (h^{-1} * g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} * (h^{-1})^{-1} = g * h$, juntando ambas expresiones se tiene que $h * g = g * h$.

$\Leftarrow$ Tomemos $h, g \in G$, luego $g * h = (g^{-1})^{-1} * (h^{-1})^{-1} = (h^{-1} * g^{-1})^{-1} = f(h^{-1} * g^{-1})$, por otro lado, $h * g = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = f(h^{-1}) * f(g^{-1})$, pero como es grupo abeliano se tiene que $h * g = g * h$, juntando ambas expresiones se tiene que $f(h^{-1}) * f(g^{-1}) = f(h^{-1} * g^{-1})$, es decir, es morfismo, falta ver que sea biyectivo.

- Inyectivo: $(\forall g_1 . g_2 \in G)(f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2)$, en efecto, sean $g_1, g_2 \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(g_1) &= f(g_2) \\
g_1^{-1} &= g_2^{-1} && \backslash \text{tomando inverso (existe porque } g_1 \text{ y } g_2 \text{ son biyectivas) } ()^{-1} \\
g_1 &= g_2
\end{aligned}$$

- Epiyectivo: $(\forall h \in G)(\exists g \in G)(f(g) = h)$, en efecto, sea $h \in G$, basta tomar $g = h^{-1}$ que sabemos que existe porque $h$ es función biyectiva, con esto se tiene que $f(g) = f(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1} = h$.

Con lo que se concluye que $f$ es isomorfismo.

# 13. Semana 12

**P2** **(a)** Si $(A, \circ)$ es grupo debemos demostrar asociatividad, existencia de neutro e inverso.

- Asociatividad: Esto ya se tiene porque la composición de funciones es asociativa.
- Neutro: Es claro que el neutro es la identidad, fijarse que $F \circ id_G = id_g \circ F = F$, falta ver que $id_G \in A$, es decir que sea isomorfismo, en efecto $id_G(x * y) = x * y = id_G(x) * id_G(y)$.
- Inverso: Dado un $F \in A$ es claro que el inverso es $F^{-1}$ sabemos que existe porque es una función biyectiva, falta ver que sea morfismo. En efecto, sea $z = F(x)$ y $w = F(y)$, se tiene que $F^{-1}(z) = x$ y $F^{-1}(w) = y$, luego

$$\begin{aligned} F^{-1}(z * w) &= F^{-1}(F(x) * F(y)) \\ &= F^{-1}(F(x * y)) \qquad \backslash \text{ya que } F \text{ es isomorfismo} \\ &= x * y \\ &= F^{-1}(z) * F^{-1}(w) \end{aligned}$$

Se concluye que, dado un $F$, el inverso es $F^{-1}$ (la inversa de la función).

Con esto se tiene que $(A, \circ)$ es grupo.

**(b)** b.1 Demostraremos que $F_g$ es homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$, en efecto, sean $x, y, g \in G$

$$\begin{aligned} F_g(x * y) &= g * (x * y) * g^{-1} \\ &= g * (x * e * y) * g^{-1} \qquad \backslash \text{operar con el neutro que no altera la ecuación} \\ &= g * (x * (g^{-1} * g) * y) * g^{-1} \\ &= (g * x * g^{-1}) * (g * y * g^{-1}) \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\ &= F_g(x) * F_g(y) \end{aligned}$$

Se concluye que $F_g$ es homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

b.2 Sean $x, g, h \in G$

$$\begin{aligned} F_{g*h}(x) &= (g * h) * x * (g * h)^{-1} \\ &= (g * h) * x * (h^{-1} * g^{-1}) \qquad \backslash \text{propiedad de los inversos} \\ &= g * (h * x * h^{-1}) * g^{-1} \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\ &= g * F_h(x) * g^{-1} \\ &= F_g(F_h(x)) \\ &= F_g \circ F_h(x) \end{aligned}$$

Se concluye que $F_{g*h} = F_g \circ F_h$.

**b.3** Recordemos que el inverso de $e$ es él mismo, luego se tiene que $F_e(x) = e * x * e^{-1} = x * e^{-1} = x * e = x$.

Para concluir que $F_g$ es isomorfismo, falta ver que sea biyectiva.

- Inyectiva: $(\forall x_1, x_2 \in G)(F_g(x_1) = F_g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$, en efecto

$$\begin{aligned}
F_g(x_1) &= F_g(x_2) \\
g * x_1 * g^{-1} &= g * x_2 * g^{-1} \backslash \text{operando con inversa de } g \text{ por la izquierda } g^{-1}* \\
(g^{-1} * g) * x_1 * g^{-1} &= (g^{-1} * g) * x_2 * g^{-1} \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\
id_G * x_1 * g^{-1} &= id_G * x_2 * g^{-1} \\
x_1 * g^{-1} &= x_2 * g^{-1} \qquad \backslash \text{operando con } g \text{ por la derecha } g* \\
x_1 * (g^{-1} * g) &= x_2 * (g^{-1} * g) \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\
x_1 * id_G &= x_2 * id_G \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

- Epiyectiva: $(\forall y \in G)(\exists x \in G)(F_g(x) = y)$, en efecto, basta tomar $x = g^{-1} * y * g$, con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
F_g(x) &= g * x * g^{-1} \\
&= g * (g^{-1} * y * g) * g^{-1} \\
&= (g * g^{-1}) * y * (g * g^{-1}) \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\
&= id_G * y * id_G \\
&= y
\end{aligned}$$

Se concluye que $F_g$ es un isomorfismo, además usando las propiedad (b.2) y (b.3) se tiene que $F_g \circ F_{g^{-1}} = F_{g^{-1}} \circ F_g = F_{g*g^{-1}} = F_{g^{-1}*g} = F_e = id_G$, con esto se concluye que el inverso de $F_g$ llamado $(F_g)^{-1}$ es $F_{g^{-1}}$.

**(c)** Basta ocupar la propiedad compacta, es decir demostrar que $(\forall F_g, F_h \in B)\ F_g \circ (F_h)^{-1} \in B$, en efecto, sean $F_g, F_h \in B$, utilizando la parte (b) se tiene que $F_g \circ (F_h)^{-1} = F_g \circ F_{h^{-1}} = F_{g*h^{-1}}$, claramente $g*h^{-1} \in G$ por ser grupo y obedecer la ley de composición interna, luego $F_{g*h^{-1}} \in B$, se concluye que $(B, \circ)$ es subgrupo de $(A, \circ)$.

**P1 (a)**

| $\oplus$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |

| $\odot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

**1.1)** Recordemos que $(A, \oplus)$ es grupo abeliano, con esto tenemos $a \oplus b = b \oplus a = b$ y $a \oplus d = d \oplus a = d$, tenemos que $a$ es neutro, ya que ni $b$ ni $d$ pueden serlo $(a \oplus b \neq a$ y $a \oplus d \neq a)$, $c$ tampoco puede serlo ya que $c \oplus c \neq c$, por lo tanto, $a \oplus c = c \oplus a = c$, notemos que los inversos de $b$ y $c$ son ellos mismos, ahora veamos que $c \oplus b = b \oplus c = d$ , $b \oplus d = d \oplus b = c$ y $d \oplus c = c \oplus d = b$.

Supongamos que $c \oplus b = b \oplus c \neq d$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:

- $c \oplus b = b \oplus c = a \Rightarrow$ el inverso de $c$ es $b$, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $c \oplus b = b \oplus c = c \Rightarrow b$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $c \oplus b = b \oplus c = b \Rightarrow c$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $c \oplus b = b \oplus c = d$.

Supongamos que $b \oplus d = d \oplus b \neq c$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:
- $b \oplus d = d \oplus b = a \Rightarrow$ el inverso de $b$ es $d$, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $b \oplus d = d \oplus b = d \Rightarrow b$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $b \oplus d = d \oplus b = b \Rightarrow d$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $b \oplus d = d \oplus b = c$.

Supongamos que $d \oplus c = c \oplus d \neq b$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:
- $d \oplus c = c \oplus d = a \Rightarrow$ el inverso de $c$ es $d$, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $d \oplus c = c \oplus d = d \Rightarrow c$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $d \oplus c = c \oplus d = c \Rightarrow d$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $d \oplus c = c \oplus d = b$.

Finalmente como $d$ tiene que poseer inverso y no pueden ser ni $a$, $b$ o $c$ ya que el inverso es único, solamente queda que $d$ sea inverso de sí mismo, es decir $d \oplus d = a$.

Para la otra tabla usaremos la propiedad distributiva es así como tenemos lo siguiente:
- $b \odot c = (c \oplus d) \odot c = (c \odot c) \oplus (d \odot c) = c \oplus c = a$
- $b \odot b = b \odot (d \oplus c) = (b \odot d) \oplus (b \odot c) = a \oplus a = a$
- $c \odot b = (b \oplus d) \odot b = (b \odot b) \oplus (d \odot b) = a \oplus b = b$
- $c \odot d = c \odot (b \oplus c) = (c \odot b) \oplus (c \odot c) = b \oplus c = d$
- $d \odot d = d \odot (b \oplus c) = (d \odot b) \oplus (d \odot c) = b \oplus c = d$

**1.2)** No es conmutativo, basta ver que $b \odot c \neq c \odot b$, tampoco tiene neutro, ya que de existir debería cumplir que $x \odot e = x\ \forall x \in \{a, b, c, d\}$, ilustrativamente debería haber una tabla del estilo

| $\odot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | $a$ | |
| $b$ | | | $b$ | |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | | | $d$ | |

es decir que se repitan los elementos en la fila y columna i-ésima, siendo el elemento i-ésimo el elemento neutro (en el ejemplo es $c$), como esto no ocurre, el anillo no posee neutro para $\odot$. Finalmente sí posee divisores de cero ya que el neutro para $\oplus$ es $a$ y $b \odot c = b \odot b = b \odot d = a$, con $b, c, d \neq a$.

**(b)** c.1) Sea $x \in A$

$$\begin{aligned} x &= x \cdot x && \backslash\text{hipótesis} \\ &= (-x)\cdot(-x) && \backslash\text{propiedad de los anillos} \\ &= (-x)\cdot[(-x)\cdot(-x)] && \backslash\text{hipótesis} \\ &= (-x)\cdot(x\cdot x) && \backslash\text{propiedad de los anillos} \\ &= (-x)\cdot x && \backslash\text{hipótesis} \\ &= -(x\cdot x) && \backslash\text{propiedad de los anillos} \\ &= -(x) && \backslash\text{hipótesis} \\ &= -x \end{aligned}$$

c.2) Sean $x, y \in A$

$$\begin{aligned} (x+y) &= (x+y)\cdot(x+y) && \backslash\text{hipótesis} \\ (x+y) &= (x+y)\cdot x + (x+y)\cdot y && \backslash\text{distributividad} \\ (x+y) &= x\cdot x + y\cdot x + x\cdot y + y\cdot y \\ (x+y) &= x + y\cdot x + x\cdot y + y && \backslash\text{hipótesis} \\ (x+y) &= (x+y) + y\cdot x + x\cdot y && \backslash\text{sumando con} -(x+y) \\ (x+y)-(x+y) &= (x+y)-(x+y)+y\cdot x + x\cdot y \\ 0 &= y\cdot x + x\cdot y && \backslash\text{sumando con} -(x\cdot y) \\ 0-(x\cdot y) &= y\cdot x + x\cdot y - (x\cdot y) \\ -(x\cdot y) &= y\cdot x \\ x\cdot y &= y\cdot x && \backslash\text{propiedad c.1} \end{aligned}$$

c.3) Sean $x, y \in A$

$$\begin{aligned} (x\cdot y)\cdot(x+y) &= (x\cdot y)\cdot x + (x\cdot y)\cdot y && \backslash\text{distributividad} \\ &= (x\cdot x)\cdot y + x\cdot(y\cdot y) && \backslash\text{conmutatividad y asociatividad de } \cdot \\ &= x\cdot y + x\cdot y && \backslash\text{hipótesis} \\ &= x\cdot y - (x\cdot y) && \backslash\text{propiedad c.1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

# 14. Semana 13

**P1** **(a)** Si tenemos $|z| = |z+1| = 1$, elevando al cuadrado se tiene que $|z|^2 = |z+1|^2 = 1$, recordando que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, entonces

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= 1 \\ (z+1)\cdot\overline{(z+1)} &= 1 \\ (z+1)\cdot(\overline{z}+\overline{1}) &= 1 \\ (z+1)\cdot(\overline{z}+1) &= 1 \\ z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ |z|^2+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ 1+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ z &= -1-\overline{z} \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2\cdot z \\ &= z^2\cdot(-1-\overline{z}) \qquad \text{\usando la igualdad anterior} \\ &= -z^2 - z\cdot z\cdot\overline{z} \\ &= -z^2 - z\cdot|z|^2 \\ &= -z^2 - z \\ &= z(-z-1) \\ &= z\cdot\overline{z} \qquad \text{\usando la igualdad anterior} \\ &= |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Se concluye que $z$ es raíz cúbica de la unidad.

**(b)** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
|1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &= (1-z_2\overline{z_1})\overline{(1-z_2\overline{z_1})} - (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(\overline{1}-\overline{z_2\overline{z_1}}) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(1-\overline{z_2}z_1) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_1}z_1\overline{z_2} - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2)\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - |z_2|^2\\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2(1-|z_1|^2)\\
&= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)
\end{aligned}$$

**(c)** Como se tiene que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, elevando al cuadrado se deduce que $|z_1|^2 < 1$ y $|z_2|^2 < 1$, o lo que es lo mismo $(1-|z_1|^2) > 0$ y $(1-|z_2|^2) > 0$, si multiplicamos ambas desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) &> 0\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &> 0 \qquad \backslash \text{usando la igualdad anterior}\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 &> |z_1-z_2|^2 \qquad \backslash \cdot \frac{1}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
\frac{|1-z_2\overline{z_1}|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \qquad \backslash\sqrt{()}\\
1 &> \frac{||z_1-z_2||}{||1-z_2\overline{z_1}||}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_2\overline{z_1}|}
\end{aligned}$$

**P2** Por propiedad de los complejos si $z \in \mathbb{C}$ y $z = \overline{z}$ entonces $z \in \mathbb{R}$, procedemos entonces a obtener el conjugado de la expresión, llamemos $w = \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}$, luego

$$\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}} \\
&= \overline{\frac{1}{1+z^n}} + \overline{\frac{1}{1+\overline{z}^n}} && \backslash \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \\
&= \frac{\overline{1}}{\overline{1+z^n}} + \frac{\overline{1}}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{1}{\overline{1+z^n}} + \frac{1}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash\text{el conjugado de un número real es el mismo número} \\
&= \frac{1}{\overline{1}+\overline{z^n}} + \frac{1}{\overline{1}+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z^n}} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}}^n} && \backslash \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \text{ inductivamente } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+z^n} && \backslash \overline{\overline{z}} = z \\
&= \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n} \\
&= w
\end{aligned}$$

Se concluye que $w \in \mathbb{R}$.

**P3** **(a)** Sean $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ las representaciones polares de $z_1$ y $z_2$ respectivamente, el ángulo entre $z_1$ y $z_2$, es decir entre $\theta_1$ y $\theta_2$, puede ser $\theta_1 - \theta_2$ o $\theta_2 - \theta_1$ (dependiendo si $\theta_1 > \theta_2$ o si $\theta_2 > \theta_1$ respectivamente), supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 > \theta_2$, con esto $\theta_1 - \theta_2 = \phi$, recordar que $\overline{z_2} = \overline{|z_2|e^{i\theta_2}} = |z_2|e^{-i\theta_2}$ luego $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} = |z_1||z_2|e^{i\phi}$. Notemos que el conjugado de $z_1 \cdot \overline{z_2}$ es $\overline{z_1} \cdot z_2$, con esto $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 2Re(|z_1||z_2|e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|Re(e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|\cos\phi$. Notar que como coseno es par, $\cos\phi = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ con lo cual se deduce que sin importar las condiciones de los ángulos se llega al mismo resultado.

**(b)**

$$\begin{aligned}
|s|^2 &= |u-v|^2 \\
&= (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) \\
&= u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\
&= u\overline{u} + v\overline{v} - (u\overline{v} + v\overline{u}) \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\phi && \backslash\text{usando la parte (a)}
\end{aligned}$$

**P4** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ es claro que $|z_1| = |z_1| \Leftrightarrow z_1\mathcal{R}z_1$.
- Simétrica: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, como $z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1| \Leftrightarrow z_2\mathcal{R}z_1$.
- Transitiva: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, como $z_1\mathcal{R}z_2$ y $z_2\mathcal{R}z_3$ se tiene que $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Leftrightarrow z_1\mathcal{R}z_3$.

Luego la relación es de equivalencia, para la clase de equivalencia de $z_0$ tenemos que

$$[z_0]_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ z_0\mathcal{R}z\} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |2 + i\sqrt{5}| = |z|\} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| = 3\}$$

Dado que $z = x + iy$ esto quiere decir que $|x + iy| = 3$ o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 = 3^2$, esto describe una circunfenrencia de radio 3 centrada en el origen.

**P5** Basta demostrar que $z = \overline{z}$

$$\begin{aligned}
|z+i| &= |z-i| \\
|z+i|^2 &= |z-i|^2 \\
(z+i)\overline{(z+i)} &= (z-i)\overline{(z-i)} \\
(z+i)(\overline{z}-i) &= (z-i)(\overline{z}+i) \\
z\overline{z} - zi + i\overline{z} - i^2 &= z\overline{z} + zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - i^2 &= zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - (-1) &= zi - i\overline{z} - (-1) \\
-zi + i\overline{z} + 1 &= zi - i\overline{z} + 1 \\
-zi + i\overline{z} &= zi - i\overline{z} \\
2\overline{z}i &= 2zi \qquad \backslash \cdot 2i \\
-4\overline{z} &= -4z \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

Se concluye que $z \in \mathbb{R}$.

**P6**

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= [(1-i)(1+i)]^4 \\
&= (1^2 - i^2)^4 \\
&= (1-(-1))^4 \\
&= 2^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)\overline{(1-i)}+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{1^2-i^2+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i} \qquad \backslash\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{(i-1)(2-i)}{2^2-i^2}\\
&= 1+i+\frac{2i-i^2-2+i}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i-1}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i}{5}-\frac{1}{5}\\
&= \frac{4}{5}+\frac{8i}{5}
\end{aligned}$$

**P7 (a)**

$$\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\cdot\alpha)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\cdot\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\cdot\alpha)+i\sin(k\cdot\alpha))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\cdot 1^{n-k} \qquad \backslash 1^{n-k}=1\\
&= (e^{i\alpha}+1)^n\\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha+1)^n
\end{aligned}$$

**(b)** Usando la indicación se tiene que

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^n &= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1)^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1 - \sin^2(\alpha/2))^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2))^n \\
&= (2\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2))^n \\
&= [2\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))]^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{i\alpha/2})^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{in\cdot\alpha/2}) \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(n\cdot\alpha/2) + i\sin(n\cdot\alpha/2)) \\
S + iS' &= 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2) + i2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)
\end{aligned}$$

Recordemos que esta expresión es equivalente con $S + iS'$, luego igualando partes real e imaginaria con sus respectivos términos se tiene que $S = 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2)$ y $S' = 2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)$.

**P8** Primero podemos expresar como sumatoria ambas expresiones

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} = S$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} = S'$$

Procedemos a sumar $S+iS'$, esto nos entrega

$$\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} + 1 - 1 \qquad \backslash\text{sumar } 0\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} - 1 \qquad \backslash\text{incorporando primer término a la sumatoria}\\
&= \frac{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \qquad \backslash\text{geométrica}\\
&= \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1\\
&= \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1\\
S+iS' &= -1
\end{aligned}$$

Ahora si igualamos partes real e imaginaria se tiene que $S' = 0$ (el resultado no tiene componente imaginaria) y $S = -1$, tal cual queríamos demostrar.

**P9** **(a)** Como $z$ es raź $n$-ésima quiere decir que $z^n = 1$, si $n$ es divisor de $m$, entonces $m = n\cdot k$ con $k\in\mathbb{Z}$, entonces se tiene que $z^m = z^{n\cdot k} = (z^n)^k = (1)^k = 1$, con lo que se concluye que $z$ es raíz $m$-ésima de la unidad.

**(b)** Sean $z_1, z_2 \in U$ esto quiere decir que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $z_1^{n_1} = 1$ y $z_2^{n_2} = 1$, hay que demostrar que $z_1\cdot z_2^{-1} \in U$, es decir, encontrar un $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ tal que $(z_1\cdot z_2^{-1})^n = 1$, en efecto, tomando $n = n_1\cdot n_2$ se tiene que $(z_1\cdot z_2^{-1})^n = (z_1\cdot\frac{1}{z_2})^{n_1\cdot n_2} = \frac{z_1^{n_1\cdot n_2}}{z_2^{n_1\cdot n_2}} = \frac{(z_1^{n_1})^{n_2}}{(z_2^{n_2})^{n_1}} = \frac{1^{n_2}}{1^{n_1}} = 1$. Se concluye que $(U,\cdot)$ es subgrupo de $(S,\cdot)$.

# 15. Semana 14

**P1** **(a)** $p(x)$ es un polinomio de grado $n$, sin embargo, $L(p)(x)$ disminuye en 1 el grado del polinomio (notar que el exponente de $x$ llega hasta $n-1$), por lo tanto, el grado de $L(p)(x)$ es $n-1$.

**(b)** Llamaremos $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, calcularemos $L(p)\cdot q$, $L(q)\cdot p$ y $L(p\cdot q)$ por separado.

$$\begin{aligned}
L(p)\cdot q &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \\
L(p)\cdot q &= \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \qquad \text{\textbackslash partir de 0 en esta sumatoria no la altera} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} k a_k b_i x^{k+i-1} \qquad \backslash k \text{ no depende de } i
\end{aligned}$$

Lo que ven ahí es una sumatoria doble cuyo mayor grado de $x$ será $n+m-1$, vamos a reordenar esta sumatoria, pero antes es necesario ilustrarla con un ejemplo para entender mejor lo que ocurre, llamemos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, se tiene que $L(p)(x) = a_1 + 2a_2x$, luego $L(p)(x)\cdot q(x) = (b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)(a_1+2a_2x) = a_1b_0 + 2a_2b_0x + a_1b_1x + 2a_2b_1x^2 + a_1b_2x^2 + 2a_2b_2x^3 + a_1b_3x^3 + 2a_2b_3x^4$, efectivamente el mayor grado es $2+3-1=4$, reordenando el resultado se tiene que $a_1b_0 + (2a_2b_0 + a_1b_1)x + (2a_2b_1 + a_1b_2)x^2 + (2a_2b_2 + a_1b_3)x^3 + 2a_2b_3x^4$ notar entonces que este resultado se puede expresar como una sumatoria del estilo

$$\sum_{j=0}^{n+m} C_j x^{j-1}$$

Además $C_0 = 0$, $C_1 = a_1b_0$ y $C_2 = 2a_2b_0 + a_1b_1$, y fijándonos en el resultado obtenido anteriormente se tiene que $C_2 = 2a_2b_0 + a_1b_1 = 0\cdot a_0b_{2-0} + 1\cdot a_1b_1 + 2a_2b_0 = \sum_{k=0}^{2} k a_k b_{2-k}$, veamos si se cumple para $C_3$ (el coeficiente que acompaña a $x^2$), nos debería dar como nos dio en el ejemplo $2a_2b_1 + a_1b_2$. Calculando $\sum_{k=0}^{3} k a_k b_{3-k} = 0\cdot a_0b_{3-0} + 1\cdot a_1b_2 + 2a_2b_1 + 3a_3b_0$ pero $a_3$ no existe (=0), lo que nos da $2a_2b_1 + a_1b_2$ que coincide con lo que se quería llegar, resumiendo, para un $C_j$ la fórmula queda $C_j = \sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k}$ el reordenamiento final de la sumatoria es

$$\sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k} x^{j-1}$$

Lo que se hizo fue un reemplazo de índices, antes la sumatoria doble tenía dos ($i$ y $k$) independientes entre sí pero tenían un fin en común: el exponente de $x$, entonces era posible cambiar la sumatoria para que fuera de 0 a $n+m$, con un índice $j$ (así se recorrían los exponentes de $x$ solamente una vez) y respecto a los coeficientes es preciso notar que $k, i \geq 0$ y su suma tenía que dar $j$ ($x^{i+k-1} = x^{j-1}$), pero tener dos índices que sumados dan $j$ es igual que tener uno que va de 0 a $j$ y el otro es la diferencia entre ellos, de ahí que el índice $i$ se reemplazó por $j - k$.

En el caso de $L(q) \cdot p$ se tiene que

$$\begin{aligned}
L(q) \cdot p &= \sum_{i=1}^{m} i b_i x^{i-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
L(p) \cdot q &= \sum_{i=0}^{n} i b_i x^{i-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k && \backslash\text{partir de 0 en esta sumatoria no la altera} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} i a_k b_i x^{k+i-1} && \backslash k \text{ no depende de } k \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} (j-k) a_k b_{j-k} x^{j-1}
\end{aligned}$$

Siendo consistentes con el reemplazo del desarrollo anterior ($i = j - k$), el resultado es el mismo.

En el caso de $L(p \cdot q)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
p \cdot q &= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j && \backslash\text{fórmula de producto de polinomios} \\
L(p \cdot q) &= \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} j a_k b_{j-k} x^{j-1} \\
L(p \cdot q) &= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} j a_k b_{j-k} x^{j-1} && \backslash\text{partir de 0 en esta sumatoria no la altera}
\end{aligned}$$

Veamos que nos da $L(p)\cdot q + L(q)\cdot p$

$$\begin{aligned}
L(p)\cdot q + L(q)\cdot p &= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k} x^{j-1} + \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(j-k) a_k b_{j-k} x^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k} x^{j-1} + \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(j a_k b_{j-k} x^{j-1} - k a_k b_{j-k} x^{j-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(k a_k b_{j-k} x^{j-1} + j a_k b_{j-k} x^{j-1} - k a_k b_{j-k} x^{j-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} j a_k b_{j-k} x^{j-1} \\
&= L(p\cdot q)
\end{aligned}$$

**(c)**
- Caso base($n=1$): Tenemos que $a_1 = 1$, luego $L(p)(x) = L((x-d)) = 1 = 1\cdot(x-d)^0$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $L(p)(x) = n\cdot(x-d)^{n-1}$, para cierto $p(x) = (x-d)^n$ con $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $L(p)(x) = (n+1)\cdot(x-d)^n$, con $p(x) = (x-d)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
L(p)(x) &= L((x-d)^n\cdot(x-d)) \\
&= L((x-d)^n)(x-d) + L((x-d))(x-d)^n \qquad \backslash\text{usando parte (b)} \\
&= n\cdot(x-d)^{n-1}(x-d) + 1\cdot(x-d)^n \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= n\cdot(x-d)^n + (x-d)^n \\
&= (n+1)\cdot(x-d)^n
\end{aligned}$$

# 16. Semana 15

**P1** Si $\alpha, \beta, \gamma$ son las raíces de $p(z)$, dado que es mónico entonces se puede escribir como $p(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$, luego igualando se tiene que

$$\begin{aligned} z^3 + az^2 + bz + c &= (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) \\ &= (z^2 - \alpha z - \beta z + \alpha\beta)(z-\gamma) \\ &= z^3 - \gamma z^2 - \alpha z^2 + \alpha\gamma z - \beta z^2 + \beta\gamma z + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma \\ z^3 + az^2 + bz + c &= z^3 - (\gamma + \alpha + \beta)z^2 + (\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta)z - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

Pero por igualdad de polinomios entonces los coeficientes son iguales con lo que se deduce que $\alpha\beta\gamma = -c$, $\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta = b$ y $\gamma + \alpha + \beta = -a$. Usando esto, como los coeficientes son reales, y admite una raíz compleja, entonces su conjugado también es raíz, luego $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 16$, con esto se tiene que $z_1\overline{z_1}\gamma = 112$, es decir, $16\gamma = 112$ con lo que la tercera raíz es $\gamma$=7, además

$$\begin{aligned} z_1 + \overline{z_1} + 7 &= 11 \\ 2Re(z_1) &= 4 \\ Re(z_1) &= 2 \end{aligned}$$

Si $z_1 = a + ib$ y es de módulo 4, como $a = 2$ quiere decir que $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$, con lo que $b^2 = 12$ y obtenemos las dos soluciones restantes $b_1 = 2\sqrt{3}$ y $b_2 = -2\sqrt{3}$, finalmente las 3 raíces son $z_1 = 2 + i2\sqrt{3}$, $\overline{z_1} = 2 - i2\sqrt{3}$ y $\gamma = 7$.

**P2** Aplicando la misma relación que en el P1, como los coeficientes son reales, y admite una raíz compleja, entonces su conjugado también es raíz, luego $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 13$, con esto se tiene que $z_1\overline{z_1}\gamma = 65$, es decir, $13\gamma = 65$ con lo que la tercera raíz es $\gamma$=5, además

$$\begin{aligned} z_1 + \overline{z_1} + 5 &= 9 \\ 2Re(z_1) &= 4 \\ Re(z_1) &= 2 \end{aligned}$$

Si $z_1 = a + ib$ y es de módulo 4, como $a = 2$ quiere decir que $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, con lo que $b^2 = 9$ y obtenemos las dos soluciones restantes $b_1 = 3$ y $b_2 = -3$, finalmente las 3 raíces son $z_1 = 2 + i3$, $\overline{z_1} = 2 - i3$ y $\gamma = 5$.

**P3** Lo primero es obtener las raíces de $q(x) = x^2 + x + 1$, mediante la fórmula cuadrática

$$x^2 + x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 = & \frac{-1+\sqrt{1^2-4}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ x_2 = & \frac{-1-\sqrt{1^2-4}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{-2\pi i}{3}} \end{cases}$$

Con esto se tiene entonces que $\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1 = q\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = q(x_1) = 0$ y $\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^2 + e^{\frac{-2\pi i}{3}} +$

$1 = q\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = q(x_2) = 0$. Guardaremos este resultado y probaremos que $x_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ es raíz de $p(x) = x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$, en efecto

$$\begin{aligned}
p\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2n} + 1 + (e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1)^{2n} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + (e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{6k\pm2} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6k\pm2} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{6k}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{\pm2} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6k}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{\pm2} \\
&= \left(e^{4\pi ik}\right)\left(e^{\frac{\pm4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{2\pi i}\right)\left(e^{\frac{\pm2\pi i}{3}}\right) \\
&= \left(e^{\frac{\pm4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{\pm2\pi i}{3}}\right)
\end{aligned}$$

Si analizamos por casos (positivo y negativo) se tiene que

- Caso +: $\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 + 1 + \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = q(x_1) = 0.$
- Caso -: $\left(e^{\frac{-4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^2 + 1 + \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = q(x_2) = 0.$

Probamos entonces que $x_1$ es raíz de $p(x)$, pero además, $x_2$ es conjugado de $x_1$ y los coeficientes son reales lo que implica que $x_2$ también es raíz de $p(x)$. Por propiedad si $p(x)$ tiene raíces $x_1$ y $x_2$ entonces el producto de de la raíces $(x - x_1)(x - x_2)$ divide a $p(x)$ (recordar que $p(x)$ se puede descomponer en productos de raíces, luego es factible simplificar por ellas), pero justamente $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, con lo que se concluye que $q(x)$ divide a $p(x)$.

**P4** Como $p(x)$ tiene $n$ raíces distintas en $\mathbb{C}$ vamos a llamar $x_1, x_2, ..., x_k$ las raíces reales de $p(x)$, por lo cual existen $n - k$ raíces complejas. Debido al enunciado, si $z \in \mathbb{C}$ es raíz entonces su conjugado también lo es, entonces llamaremos $z_1, z_2, ...., z_l, \overline{z_1}, \overline{z_2}, ...., \overline{z_l}$ las raíces complejas, con $l = \frac{n-k}{2}$. Finalmente como $p(x)$ es mónico es posible reeescribirlo de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - x_1)...(x - x_k)(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2})....(x - z_l)(x - \overline{z_l}) \\
&= (x - x_1)...(x - x_k)(x - z_1 - \overline{z_1} + z_1\overline{z_1})(x - z_2 - \overline{z_2} + z_2\overline{z_2})....(x - z_l - \overline{z_l} + z_1\overline{z_l}) \\
&= (x - x_1)...(x - x_k)(x - 2Re(z_1) + |z_1|^2)(x - 2Re(z_2) + |z_2|^2)....(x - 2Re(z_l) + |z_l|^2)
\end{aligned}$$

Con esto $p(x)$ tiene solamente coeficientes reales, con lo que se concluye que $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

**P5** **(a)** Usando el teorema de la división y del resto, existe un polinomio $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que el polinomio se puede escribir como $p(x) = q(x)(x^2 - b^2) + cx$ con $gr(cx) < gr(x^2 - b^2)$, luego $p(b) = q(b)(b^2 - b^2) + cb = cb$ y $p(-b) = q(b)((-b)^2 - b^2) - cb = -cb$.

**(b)** Por el teorema de la división, existe un polinomio $s(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x)$ con $gr(r(x)) < gr((x^2 - b^2)(x - a))$, es decir, $gr(r(x)) < 3$, lo que es lo mismo que $gr(r(x)) \leq 2$.

**(c)** Sabemos que $p(x) = q(x)(x^2 - b^2) + cx$ y que $p(x) = s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x)$ , igualando ambas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x) &= q(x)(x^2 - b^2) + cx \\ r(x) &= q(x)(x^2 - b^2) - s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + cx \\ r(x) &= (x^2 - b^2)[q(x) - s(x)(x - a)] + cx \end{aligned}$$

Pero como $gr(r(x)) \leq 2$, entonces necesariamente $[q(x) - s(x)(x - a)]$ es un polinomio constante, de no ser así, $[q(x)-s(x)(x-a)]$ sería de la foma $a_1x+...$ que al multiplicarse con $(x^2 - b^2)$ entregaría un polinomio de grado mayor o igual que 3, lo que contradice que $gr(r(x)) \leq 2$, luego como es mónico, entonces solamente quedan 2 casos posibles: $[q(x) - s(x)(x - a)] = 1$ o $[q(x) - s(x)(x - a)] = 0$, en el primer caso $r(x) = x^2 - b^2 + cx$ y en el segundo caso $r(x) = x$, necesariamente con $c = 1$ en este último caso porque $r(x)$ es mónico. Cualquiera de los 2 resultados es correcto.

**P6** Con la información que se nos entrega y usando el teorema de la división, entonces existen polinomios $Q$ y $S$ en $\mathbb{K}[x]$ tales que $F = (G \cdot H)Q + R$ y $R = SG + R'$ con $gr(R) < gr(G \cdot H)$ y $gr(R') < gr(G)$, reemplazando $R$ se tiene entonces que $F = (G \cdot H)Q + SG + R'$ , reordenando se tiene que $F = G(HQ + S) + R'$, con lo que el resto de dividir $F$ por $G$ es $R'$, además efectivamente cumple que es resto ya que $gr(R') < gr(G)$ .

**P7** Notemos que como los coeficientes son reales y además $i$ es raíz, entonces $-i$ también es raíz. Por el teorema de la división, existe un polinomio $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = (x-1)q(x)+r(x)$ con $gr(r(x)) < gr((x - 1))$, esto significa que $r(x)$ es un polinomio de grado menor que 1, entonces solamente puede ser un polinomio de grado 0 (constante) o grado $-\infty$ (polinomio 0, que también es constante). En ambos casos $r(x) = k$, con $k$ constante a determinar y como nos dicen que $r(4) = 0$ quiere decir que la constante $k = 0$, ya que $r(1) = r(2) = r(3) = r(4) = ... = r(x) = k$, al ser constante siempre vale lo mismo, y si para $r(4) = 0$ entonces para el resto de valores también, con lo que se concluye que $r(x) = 0$. Al decir que $r(x)$ es 0 entonces $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$, con lo que 1 es la última raíz que se estaba buscando.

Con esto $p(x) = (x-i)(x+i)(x-1)$ e igualando con el $p(x)$ original se tiene que

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x-i)(x+i)(x-1) \\ &= (x^2 - i + i - i^2)(x-1) \\ &= (x^2+1)(x-1) \\ x^3 + ax^2 + bx + c &= x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios entonces $a = -1$, $b = 1$ y $c = -1$.

**P8** El teorema a demostrar es una generalización de que por 2 puntos pasa una única recta o por 3 puntos pasa una única parábola, siendo la recta y la parábola 2 polinomios de grados 1 y 2 respectivamente. Este teorema dice que dados $n$ puntos en el plano, existe un único polinomio de grado menor o igual a $n-1$ que pasa por todos esos puntos.

**(a)** Razonaremos por contradicción, supongamos que existen 2 polinomios de interpolación $p(x)$ y $q(x)$, con $gr(p(x)), gr(q(x)) \leq n-1$, esto quiere decir que $p(x_j) = q(x_j) = y_j$ $\forall j \in \{1,...,n\}$. Se define el polinomio $h(x) = p(x) - q(x)$, con $gr(h(x)) \leq n-1$ pero $h(x_j) = p(x_j) - q(x_j) = y_j - y_j = 0$ $\forall j \in \{1,...,n\}$, con lo que $h(x)$ tiene $n$ raíces distintas y, por lo tanto, es de grado $n$, lo que contradice que $gr(h(x)) \leq n-1$ , la única opción que queda es entonces que sea de grado $-\infty$ (polinomio 0) ya que el polinomio 0 tiene infinitas raíces. Pero entonces $h(x) = 0 = p(x) - q(x)$, con lo que $p(x) = q(x)$, es decir, solamente existe un polinomio de interpolación y con esto se demuestra la unicidad.

**(b)** El símbolo de $\pi$ grande indica una productoria, que es análogo a una sumatoria, sólo que en vez de sumar, multiplica. A modo de ejemplo $\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$. Analizemos ahora $l_j(x)$

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)} \in \mathbb{K}[x]$$

1.) El numerador multiplica $n-1$ términos, ya que se salta el asociado con $j$ $(k \neq j)$, con lo que el grado de $l_j(x)$ es $n-1$, el denominador posee coeficientes y también $(k \neq j)$ para evitar división por 0. Los $x_1, x_2 ... x_n$ son la colección de puntos del enunciado, entonces son valores fijos. Calculamos ahora $l_j(x_r)$

Si $j = r$

$$l_j(x_r) = l_j(x_j) = \frac{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)} = 1$$

Si $j \neq r$

$$l_j(x_r) = \frac{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_r - x_k)}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)} = \frac{(x_r - x_1)(x_r - x_2)...(x_r - x_r)...(x_r - x_n)}{\prod_{k=1(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)} = 0$$

Con esto se concluye que $l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases}$

2.) Por la parte 1. se tiene que el grado de $p(x)$ es menor o igual a $n-1$ ya que corresponde a una sumatoria de polinomios del tipo $l_j(x)$ cuyo grado sabemos que es $n-1$ y los $y_j$ son valores numéricos fijos, que no aumentan el grado del polinomio. Ahora falta ver que $p(x_m) = y_m\ \forall m \in \{1, ..., n\}$, en efecto, sea $m \in \{1, ..., n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
p(x_m) = & \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x_m) \\
& = y_1 l_1(x_m) + y_2 l_2(x_m) + y_3 l_3(x_m) + ... + y_m l_m(x_m) + ... + y_n l_n(x_m) \\
& = y_1 \delta_{1m} + y_2 \delta_{2m} + y_3 \delta_{3m} + ... + y_m \delta_{mm} + ... + y_n \delta_{nm} \\
& = y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot 0 + ... + y_m \cdot 1 + ... + y_n \cdot 0 \\
& = 0 + 0 + 0 + ... + y_m + ... + 0 \\
& = y_m
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x)$ es el polinomio de interpolación para la familia de puntos en el plano $(\{x_j\}_{j=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n)$.

**P9** Antes que todo, es importante notar que $J_2$ es un conjunto de polinomios reales cuyo grado es menor o igual que 2, no pueden ser constantes y no tienen coeficiente libre de $x$, es decir, son de la forma $p(x) = a_1 x + a_2 x^2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0$, al tomar dos polinomios de $J_2$ lo que hace $\triangle$ es componer ambos polinomios, pero como debe cumplir la l.c.i, entonces trunca todo grado mayor que 2, a modo de ejemplo si tomamos $p(x) = 3x + 2x^2$ y $q(x) = x + 5x^2$, se tiene que $p(x) \triangle q(x) = p(q(x)) = 3(x + 5x^2) + 2(x + 5x^2)^2 = 3x + 17x^2 + 20x^3 + 50x^4$ pero obedeciendo la l.c.i, entonces queda finalmente $p(x) \triangle q(x) = 3x + 17x^2$.

**(a)** Demostraremos que $(J_2, \triangle)$ es grupo no abeliano, es decir, que es asociativo, posee neutro e inverso, pero no es conmutativo.

- Asociatividad: Sean $p(x), q(x), r(x) \in J_2$ , siendo $p(x) = a_1 x + a_2 x^2$, $q(x) = a_3 x + a_4 x^2$ y $r(x) = a_5 x + a_6 x^2$ con $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}, a_1, a_3, a_5 \neq 0$

$$\begin{aligned}
(p(x) \triangle q(x)) \triangle r(x) &= (a_1(a_3 x + a_4 x^2) + a_2(a_3 x + a_4 x^2)^2) \triangle r(x) \\
&= (a_1 a_3 x + (a_1 a_4 + a_2 a_3^2) x^2) \triangle r(x) \\
&= a_1 a_3 (a_5 x + a_6 x^2) + (a_1 a_4 + a_2 a_3^2)(a_5 x + a_6 x^2)^2 \\
&= a_1 a_3 a_5 x + (a_1 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_5^2 + a_2 a_3^2 a_5^2) x^2
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
p(x) \triangle (q(x) \triangle r(x)) &= p(x) \triangle (a_3(a_5x + a_6x^2) + a_4(a_5x + a_6x^2)^2) \\
&= p(x) \triangle (a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2) \\
&= a_1(a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2) + a_2(a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2)^2 \\
&= a_1a_3a_5x + (a_1a_3a_6 + a_1a_4a_5^2 + a_2a_3^2a_5^2)x^2
\end{aligned}$$

- Neutro: Tomando el polinomio $q(x) = x$, claramente $q(x) \in J_2$, además se tiene que $p(x) \triangle q(x) = q(x) \triangle p(x) = p(q(x)) = q(p(x)) = p(x)$ se concluye que el neutro en $J_2$ es el polinomio $q(x) = x$.
- Inverso: Sea $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in J_2, a_1 \neq 0$ el inverso será el polinomio $q(x) = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}$, en efecto

$$\begin{aligned}
p(x) \triangle q(x) &= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + a_2\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right)^2 \\
&= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + a_2\left(\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \frac{2a_2x^3}{a_1^4} + \left(\frac{a_2x^2}{a_1^3}\right)^2\right) \\
&= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + \frac{a_2x^2}{a_1^2} \qquad \text{\textbackslash truncando grado mayor que 2} \\
&= x - \frac{a_2x^2}{a_1^2} + \frac{a_2x^2}{a_1^2} \\
&= x
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
q(x) \triangle p(x) &= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2(a_1x + a_2x^2)^2}{a_1^3} \\
&= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2(a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + a_2^2x^4)}{a_1^3} \\
&= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2a_1^2x^2}{a_1^3} \qquad \text{\textbackslash truncando grado mayor que 2} \\
&= x + \frac{a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1} \\
&= x
\end{aligned}$$

Se concluye que, dado el polinomio $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in J_2, a_1 \neq 0$, el inverso será el polinomio $q(x) = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}$, para llegar a determinarlo lo que se hizo fue tomar un $q(x)$ arbitrario, vale decir $q(x) = a_3x + a_4x^2$ y componerlo con $p(x)$, de esta manera se obtenían condiciones para $a_3$ y $a_4$

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x) &= a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3x + a_4x^2)^2 \\ &= a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3^2x^2 + 2a_3a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= a_1a_3x + a_1a_4x^2 + a_2a_3^2x^2 \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\ &= a_1a_3x + (a_1a_4 + a_2a_3^2)x^2 \end{aligned}$$

Queremos llegar al polinomio neutro $x$, entonces solamente queda que $a_1a_3 = 1$, es decir, $a_3 = \frac{1}{a_1}$ y que $a_1a_4 + a_2a_3^2 = 0$, lo que es igual a $a_4 = -\frac{a_2}{a_1^3}$.

- No abeliano: Basta tomar un contraejemplo $p(x) = x + x^2$ y $q(x) = 3x$, se tiene que

$$p(x) \triangle q(x) = 3x + (3x)^2 = 3x + 9x^2$$
$$q(x) \triangle p(x) = 3(x + x^2) = 3x + 3x^2$$

Se concluye que $(J_2, \triangle)$ es un grupo no abeliano.

**(b)** Sean $p(x) = a_1x + a_2x^2, q(x) = a_3x + a_4x^2 \in J_2, a_1, a_3 \neq 0$, con $f(p(x)) = a_1$ y $f(q(x)) = a_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(p(x) \triangle q(x)) &= f(a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3x + a_4x^2)^2) \\ &= f(a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3^2x^2 + 2a_3a_4x^3 + a_4^2x^4)) \\ &= f(a_1a_3x + a_1a_4x^2 + a_2a_3^2x^2) \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\ &= f(a_1a_3x + (a_1a_4 + a_2a_3^2)x^2) \\ &= a_1a_3 \\ &= f(p(x))f(q(x)) \end{aligned}$$

Falta demostrar que sea sobreyectivo, es decir, $(\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\})(\exists p(x) \in J_2)(f(p(x)) = y)$, en efecto, basta tomar el polinomio $p(x) = yx$, con esto se tiene que $f(p(x)) = f(yx) = y$ con lo que se concluye que es un morfismo sobreyectivo.

**(c)** *Nota: Hay un error de tipeo, en vez de $a_2$ debe decir que $a_1 = 1$*

Los polinomios en $H$ son de la forma $p(x) = x + a_2x^2$. Sean $p(x) = x + a_2x^2, q(x) = x + a_4x^2 \in H$, calculemos $p(x) \triangle q(x)^{-1}$, recordar que el inverso de $q(x)$ es $q(x)^{-1} = x - a_4x^2$

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x)^{-1} &= (x - a_4x^2) + a_2(x - a_4x^2)^2 \\ &= (x - a_4x^2) + a_2(x^2 - 2a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= x - a_4x^2 + a_2x^2 \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\ &= x + (a_2 - a_4)x^2 \end{aligned}$$

El cual pertenece a $H$. Para ver que es abeliano, tomamos dos polinomios arbitrarios en $H$. sean $p(x) = x + a_2x^2, q(x) = x + a_4x^2$

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x) &= (x + a_4x^2) + a_2(x + a_4x^2)^2 \\ &= (x + a_4x^2) + a_2(x^2 + 2a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= x + a_4x^2 + a_2x^2 \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\ &= x + (a_2 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) \triangle p(x) &= (x + a_2x^2) + a_4(x + a_2x^2)^2 \\
&= (x + a_2x^2) + a_4(x^2 + 2a_2x^3 + a_2^2x^4) \\
&= x + a_2x^2 + a_4x^2 \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\
&= x + (a_2 + a_4)x^2
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $(H, \triangle)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \triangle)$.