

## Resolución Aux #6

PL pdq si  $f: A \rightarrow B$  es epiyectiva  
 $\implies |B| \leq |A|$

En efecto, sea  $f: A \rightarrow B$  una función epiyectiva.

Como  $f$  es epiyectiva  $\Leftrightarrow f(A) = B$  (1)

Por otro lado, por "EL CARDINAL DE LA IMAGEN DE UNA FUNCIÓN"

$$\implies |f(A)| \leq |A| \quad (2)$$

Junutando (1) y (2)

$$\implies |B| = |f(A)| \leq |A|$$

$$\implies |B| \leq |A| \quad \blacksquare$$

Se puede concluir que

$$\begin{aligned} |X| \leq |Y| &\Leftrightarrow \exists f: X \rightarrow Y \text{ epiyectiva} \\ &\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X \text{ epiyectiva} \end{aligned}$$

**P2**  $A \neq \emptyset$   $\tilde{F} = \{ f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función} \}$

a) pda  $|\tilde{F}| = |A|^3$

En efecto, por la indicación definamos

$$\varphi : \tilde{F} \rightarrow A^3$$
$$f \mapsto \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3))$$

Probemos que  $\varphi$  es biyectiva

Epyectividad:  $(\forall y \in \text{Cod}(f) \exists x \in \text{Dom}(f) f(x) = y)$

Sea  $(a, b, c) \in A^3$ , podemos construir la siguiente función

$$(1) \quad f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A$$
$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} a & \text{si } n=1 \\ b & \text{si } n=2 \\ c & \text{si } n=3 \end{cases}$$

es decir  $\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = c \end{cases}$ , esta bien definida  
por  $f(i) \in A$   
 $\forall i \in \{1, 2, 3\}$

Luego para obtener el tcr  $(a, b, c) \in A^3 = \text{Cod}(\varphi)$   
me basta tomar la función  $f$  de (1)

$\Rightarrow \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3)) = (a, b, c) \quad \therefore \varphi$  es  
epyectiva



Definición

Injectividad:  $(\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Sea  $f, g \in \tilde{\mathcal{F}}$  arbitrarios tal que

$$\varphi(f) = \varphi(g) \quad (1)$$

Debemos ser capaces de demostrar que  $f = g$  (Igualdad de funciones)

Notemos primero que como  $f \in \tilde{\mathcal{F}}$  y  $g \in \tilde{\mathcal{F}}$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \{1, 2, 3\}$$

$$\wedge \text{Cod}(f) = \text{Cod}(g) = A$$

Es decir  $f$  y  $g$  tienen mismo dominio y Codominio  
falta ver que  $\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad f(i) = g(i)$   
Para esto ocuparemos (1)

$$\text{Como } \varphi(f) = \varphi(g)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(1) = g(1) \\ \wedge f(2) = g(2) \\ \wedge f(3) = g(3) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad f(i) = g(i)$$

$$\therefore f = g \quad \text{y} \quad \varphi \text{ es inyectiva}$$

Luego  $\varphi: \tilde{F} \rightarrow A^3$  es biyectiva

$$\Rightarrow |\tilde{F}| = |A^3|$$

b) Si  $A$  es numerable pdg:  $\tilde{F}$  también

Como  $A$  es numerable

$\Rightarrow A^3 = A \times A \times A$  es numerable  
ya que es producto finito de numerables

$$\Rightarrow |A^3| = |\mathbb{N}| \quad \text{y} \quad |\tilde{F}| = |A^3|$$

$$\Rightarrow |\tilde{F}| = |A^3| = |\mathbb{N}|$$

Luego  $\tilde{F}$  es numerable pues tiene el mismo cardinal de  $\mathbb{N}$



P3

$A, B \subseteq \mathbb{R}$  numerables. Demuestre que

$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$  es numerable

En efecto, tendríamos que encontrar una biyección que quizás sea poco intuitiva. Entonces

Tratemos de escribir  $A+B$  como una unión numerable de conjuntos numerables

Primero, como  $B$  es numerable, es posible escribirla como

$$(1) \quad B = \bigcup_{b \in B} \{b\}$$

← unión numerable pues "b" recorre un conjunto numerable

Por otro lado, podemos ver que podemos definir el conjunto

$$(2) \quad A + \{\bar{b}\} = \{a + \bar{b} : a \in A\} \quad \text{Donde se fija } \bar{b}$$

Voy a trabajar con esto.

Notemos que podemos recuperar  $A+B$  en términos de (1) y (2) De la siguiente forma

$$A+B = \bigcup_{b \in B} \{a+b : a \in A\} = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}$$

Esto debido a que

$$A+B = \bigcup_{\bar{b} \in B} \{a+\bar{b} : a \in A\}$$

Con la union  
hago que  $\bar{b}$  recorra  
todo  $B$ . Luego  $a$  recorre todo  $A$  y  $b$  recorre  
todo  $B$  y recupere la definici3n de  $A+B$

Tengo  $\bar{b}$  fijo

$$\Rightarrow A+B = \bigcup_{\bar{b} \in B} A+\bar{b}$$

Es decir  $A+B$  es una  
union numerable de  
conjuntos.

Me falta ver que  $A+\bar{b}$  es numerable para  
concluir. En efecto, sea

$$f: A \rightarrow A+\bar{b}$$
$$a \mapsto f(a) = a+\bar{b} \quad b \text{ fijo}$$

La cual es biyectiva.  $\rightarrow$  Verifiquelo!  
 $\hookrightarrow$  TAREA

Luego  $|A| = |A+\bar{b}|$  y  $A$  es numerable

$\Rightarrow A+\bar{b}$  es numerable



entonces

$$A+B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A+B$$

es unión numerable  
de cytos numerables!

∴  $A+B$  es numerable



pda el cyto de  $\Delta$ 's cuyos vertices  
son elementos de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  es  
numerable

Sea  $T$  el cyto a estudiar. Separemos en  
dos partes el problema

$$1) |T| \geq |N|$$

$T$  es infinito ya que, un triángulo se compone  
por 3 puntos, luego podemos fijar 2 puntos  
y 1 punto lo echamos a correr

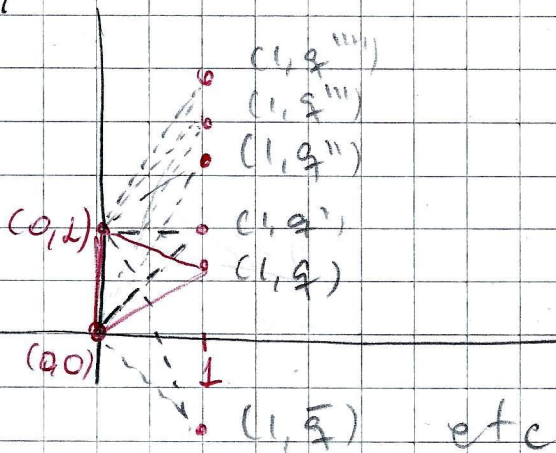
En efecto,

$$\text{Sea } (t_q)_{q \in \mathbb{Q}} = \{((0,0), (0,1), (1,q)) : q \in \mathbb{Q}\}$$

El cyto de triángulos cuyos vertices  
son  $(0,0), (0,1)$  y  $(1,n)$

donde  $n$  recorre todo  $\mathbb{N}$

Es leur



Luego  $(t_q)_{q \in \mathbb{Q}}$  es infinito pues el punto  $(1, q)$  puede tomar infinitos valores ya que la segunda coordenada puede recorrer todo  $\mathbb{Q}$

⚠️ Notar que se puede comprobar  $Q$  por  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$   
Solo se pide que los puntos tengan coordenadas racionales!

Ahora  $(t_x)_{x \in \mathbb{Q}} \subseteq T$  y  $(t_x)_{x \in \mathbb{Q}}$  es infinito

$\Rightarrow T$  es infinito.

$$\Rightarrow |T| \geq |N|$$



$$2) |T| \leq |\mathbb{N}|$$

Notemos que en  $T$  viven los elementos de la forma

$$(\underbrace{(a,b)}_A, \underbrace{(c,d)}_B, \underbrace{(e,f)}_C) \text{ t.q. } A, B \text{ y } C \text{ cumplen una propiedad con sus distancias}$$

Entonces, podemos notar que

$$T \subseteq (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^3$$

ya que en  $T$  tengo un trío de pares ordenados

$$\rightarrow |T| \leq |(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^3| = |\mathbb{Q}^6| = |\mathbb{N}|$$

$$\rightarrow |T| \leq |\mathbb{N}|$$

Donde se usa que  $\mathbb{Q}$  es numerable y  $\mathbb{Q}^6$  es numerable por ser producto finito de numerables

Luego  $|T| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |T|$

y por Teorema C-B-S

se concluye que

$$|T| = |\mathbb{N}|$$

es decir  $T$  es numerable.

---

**P5** p.d.z  $\mathbb{I}$  es no numerable

hay que demostrar que  $|\mathbb{I}| > |\mathbb{N}|$

Supongamos por contradicción que  $|\mathbb{I}| \leq |\mathbb{N}|$   
De aquí tenemos dos casos

(1)  $\mathbb{I}$  es finito o (2)  $\mathbb{I}$  es numerable

Claramente  $\mathbb{I}$  no es finito pues  $n\pi \in \mathbb{I}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y los números de la forma  $n\pi$  serán infinitos.

Luego solo nos quedamos con el caso (2)



Entonces, Supongamos que  $\mathbb{I}$  es numerable.

Sabemos además que  $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$

Luego  $\mathbb{R}$  es union de conjuntos numerables  
pues por hipotesis  $\mathbb{I}$  lo es y por aparte  
 $\mathbb{Q}$  también lo es

$\Rightarrow \mathbb{R}$  es numerable

por ser union  
de numerables

$\Rightarrow \Leftarrow$

ya que  $\mathbb{R}$  no es numerable

$\therefore \mathbb{I}$  es no numerable

**P6**

Sea  $A$  no numerable y  $B \neq \emptyset$

pdq  $A \times B$  es no numerable

Encontremos una función inyectiva de  $A \rightarrow A \times B$

Como  $B \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in B$ . Definamos  $f: A \rightarrow A \times B$

tal que  $f(a) = (a, b)$

donde  $b$  es el encontrado  
anteriormente

Veamos que es inyectiva

Sea  $a_1, a_2 \in A$  tal que  $f(a_1) = f(a_2)$

$$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (a_1, b) = (a_2, b)$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b = b$$

en particular  
 $\Rightarrow$

$$a_1 = a_2$$

Luego  $f$  es inyectiva entre  $A$  y  $A \times B$

$$\rightarrow |A| \leq |A \times B|$$

Luego se tiene que

$$|\mathbb{N}| < |A| \wedge |A| \leq |A \times B|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{N}| < |A \times B| \quad (*)$$

Luego  $A \times B$  es no numerable



⊛ Demostremos que dado  $A, B, C$  estos  
tales que

$$|A| < |B| \quad \wedge \quad |B| \leq |C|$$

$$\Rightarrow |A| < |C|$$

En efecto, notemos que

Como  $|A| < |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$  inyectiva  
 $\wedge$  no existe biyección

y  $|B| \leq |C| \Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow C$  inyectiva

Luego  $g \circ f: A \rightarrow C$  es inyectiva por  
ser composición de inyectivas

$$\Rightarrow |A| \leq |C|$$

Mostremos que no existe biyección entre  
 $A$  y  $C$

En efecto, supongamos que existe una byección

$$h: C \rightarrow A$$

Luego Como  $g: B \rightarrow C$  inyectiva

$\Rightarrow h \circ g: B \rightarrow A$  es inyectiva

$$\Rightarrow |B| \leq |A| \quad (1)$$

y Como  $|A| < |B|$  que implica que  
 $\rightarrow |A| \leq |B| \quad (2)$

Luego  $|A| = |B| \Rightarrow$  existe biyección

pero según el enunciado

Como  $|A| < |B| \Leftrightarrow$  inyección de  $A \rightarrow B$   
y no existe biyección



$$\therefore |A| < |C|$$