

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas y morfismos

08 de junio de 2017

P1. Se define $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a.b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

- a) Estudiar conmutatividad y asociatividad de $*$
- b) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$
- c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.
- d) Determine los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}^2, *)$

P2. a) Sea $(A, *)$ una estructura algebraicas con neutro e_A y (B, Δ) una estructura algebraica, con neutro e_B , asociativa y con todos sus elementos invertibles, es decir

$$\forall x \in B, \exists y \in B, (x \Delta y) = (y \Delta x) = e_B$$

Demuestre que si $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo entonces $f(e_A) = e_B$.

Importante: Con esto usted habrá probado algo muy genial! no se necesita tener un morfismo epiyectivo o que $e_B \in f(A)$ para tener la igualdad $f(e_A) = e_B$, ya que ahora la podemos tener pidiéndole a la estructura (B, Δ) que tenga neutro, sea asociativo y que todos sus elementos sean invertibles

- b) Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\varphi : (\mathbb{Z}_m, +_m) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Determine el neutro de $\mathbb{Z}_m$ y Demuestre que $\varphi \equiv 0$, es decir, φ es la función constante igual a 0.

P3. En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ se define la ley de composición interna $\oplus$ como sigue

$$([n], m) \oplus ([n'], m') = ([n + n'], m + m')$$

Donde la operación $+$ es la usual. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ en $(\mathbb{Z}, +)$

- a) Demuestre que existe neutro en $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$
- b) Demuestre que $\varphi([1], 0) = 0$
Indicación: Calcule $\varphi([1], 0) \oplus ([1], 0) \oplus ([1], 0)$
- c) Concluya que $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.
 Indicación: Puede usar la pregunta P2.a)

Propuestos

P4. Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A . Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A : a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

- a) $\forall x, y \in B, x * y \in B$
- b) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$
- c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1} , entonces $x^{-1} \in B$

P5. Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación $\oplus$ definida por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$$

- a) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es una estructura algebraica, asociativa, que tiene neutro y que todos sus elementos son invertibles.
- b) Construya un isomorfismo $f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ tal que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$. Concluya que es único.

P6. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la l.c.i $*$ como:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que:

- a) $*$ es conmutativa
- b) $(\mathcal{F}, *)$ posee elemento neutro y encuéntralo.
- c) $*$ distribuye con respecto a la suma de funciones. La suma de funciones es $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$