

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Resumen: Estructuras Algebraicas y morfismos

- Dado un conjunto A no vacío. Diremos que $*$ es una ley de composición interna (l.c.i) si $*$ es una función

$$* : A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

- Si $*$ es una l.c.i definida en un conjunto A , entonces al par $(A, *)$ lo llamaremos **estructura algebraica**.

Si sobre A tenemos definida una segunda operación Δ , denotaremos $(A, *, \Delta)$ a la estructura algebraica que considera ambas l.c.i en A

- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

1. Diremos que $*$ es **asociativa** si

$$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

2. Sea $e \in A$. Diremos que e es elemento **neutro para $*$** si

$$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

3. Si $e \in A$ es el neutro para $*$, diremos que $x \in A$ es **invertible si**:

$$\exists y \in A, y * x = x * y = e$$

En tal caso, diremos que existe inverso de x y más aun y es un inverso de x

4. Diremos que $*$ es **conmutativa** si

$$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

5. Sea $a \in A$. Diremos que a es **absorbente** si:

$$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

6. Sea $a \in A$. Diremos que a es **idempotente** si $a * a = a$

7. Sea $a \in A$. Diremos que a es **cancelable** si $\forall y, z \in A$ se tienen:

$$a * y = a * z \Rightarrow y = z$$

$$y * a = z * a \Rightarrow y = z$$

8. Sea $(A, *, \Delta)$ una estructura algebraica con dos operaciones. Diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si para todo $x, y, z \in A$, se tienen:

$$x \Delta (y * z) = (x \Delta y) * (x \Delta z)$$

$$(y * z) \Delta x = (y \Delta x) * (z \Delta x)$$

- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica. Se tiene que $a \in A$ es cancelable si y sólo si las funciones I_a y D_a definidas por $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$, son inyectivas.

- En una estructura algebraica $(A, *)$, el elemento neutro es **único**.

- Si la estructura algebraica $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos son unicos. De esta forma el inverso de $x \in A$, lo podemos denotar sin ambigüedad como x^{-1}

- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in A$ entonces:

1. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aun, $(x^{-1})^{-1} = x$

2. Si $x, y \in A$ son invertibles entonces $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

3. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

- Se define $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv_n$. A partir de esto podemos definir:

- $[x]_n + [y]_n = [x + y]_n$
- $[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$

Recordemos además que si $x \equiv_n y$, entonces $[x]_n = [y]_n$

- Sea $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \equiv_n x_2$ y $y_1 \equiv_n y_2$. Entonces

$$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \text{ y } (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$

Es decir, si $[x_1]_n = [x_2]_n$ y $[y_1]_n = [y_2]_n$, entonces

$$[x_1 + y_1]_n = [x_2 + y_2]_n \text{ y } [x_1 \cdot y_1]_n = [x_2 \cdot y_2]_n$$

- (Notación) $x \equiv_n y \iff x = y$ (mód n)
- Para dos estructuras $(A, *)$, (B, Δ) una función $f : A \rightarrow B$ es un **homomorfismo** de $(A, *)$ en (B, Δ) si $\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$. Si f es inyectiva se llamará monomorfismo. Si f es epiyectiva se llamará epimorfismo. Si f es biyectiva se llamará isomorfismo. Si $(A, *) = (B, \Delta)$ los homomorfismos se llamarán endomorfismos y en caso que si el endomorfismo es biyectivo se llamará automorfismo.
- Sea $f : A \rightarrow B$ un epimorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ) , entonces se tienen las siguientes propiedades:

- Si $(A, *)$ es asociativo, entonces (B, Δ) también lo es
- Si $(A, *)$ es conmutativo, entonces (B, Δ) también lo es
- Si e es neutro de $(A, *)$, entonces $f(e)$ es neutro de (B, Δ)

- Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ) , es decir $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$

3 y 4 están sujetas a que el neutro de (B, Δ) esté en la imagen de f

- Sea f un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) , no necesariamente epiyectivo, con neutros e_A y e_B respectivamente.

- Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$
- Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ)

- Sean $(A, *)$ y (B, Δ) con neutros e_A y e_B respectivamente y donde todos los elementos son invertibles. Un homomorfismo $f : A \rightarrow B$ de $(A, *)$ en (B, Δ) es un monomorfismo, es decir es inyectivo, si y sólo si, $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$

- Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) y $g : B \rightarrow C$ un homomorfismo de (B, Δ) en (C, \bullet) . Entonces la composición $g \circ f : A \rightarrow C$, es un homomorfismo de $(A, *)$ en (C, \bullet)

- Dos estructuras $(A, *)$ y (B, Δ) son isomorfas, denotada $(A, *) \cong (B, \Delta)$, si existe una función $f : A \rightarrow B$ que es un isomorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ)

- Si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ) , entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es un isomorfismo entre (B, Δ) y $(A, *)$

- La relación \cong entre estructuras algebraicas es relación de equivalencia