MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 10: Conjuntos infinitos

01 de junio de 2017

- $|A| = |B|$ si existe una función $f : A \to B$ biyectiva.
- $|A| \leq |B|$ si existe una función $f : A \to B$ inyectiva.
- $|A| < |B|$ si existe una función $f : A \to B$ inyectiva, pero no existe una función biyectiva $g : A \to B$
- Se tienen las siguientes propiedades:
  1. $|A| \leq |A|$
  2. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$
  3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$
- **Teorema Cantor-Bernstein-Schöeder**
$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$$
- **Cardinal de la imagen de un conjunto**
Si $f : A \to B$ es función, entonces $|f(A)| \leq |A|$
- $\mathbb{N}$ es infinito y si un conjunto A cumple que $|A| = |\mathbb{N}|$, entonces se dirá que A es numerable. Por otro lado si un conjunto A cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$ se dirá que A es a lo más numerable.
- $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito.
- Todo conjunto infinito A inmediatamente cumple que $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Es decir, A es infinito si y sólo si $|A| \geq |\mathbb{N}|$.
- Sea A un conjunto infinito tal que $|A| \leq |\mathbb{N}|$, entonces A es numerable, es decir, $|A| = |\mathbb{N}|$
- Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$
- $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección finita de conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ también es numerable
- Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección finita de conjuntos numerables, entonces
$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$$
también es numerable.
Una consecuencia de esto es que $\mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ son numerables, con $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$
- Sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es numerable.
- Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$, una colección a lo más numerable de conjuntos a lo más numerables (i.e. $|A_i| \leq |N|$). Entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ es a lo más numerable
- El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos *no es numerable*
Ej: $\prod_{i\in\mathbb{N}}\{x_i, y_i\}$ donde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$
- **Teorema Cantor**
Sea A un conjunto entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- Un conjunto A se dirá *no numerable* si $|\mathbb{N}| < |A|$
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $|(a,b)|$, $|(a,b]|$, $|[a,b)|$ y $|[a,b]|$ son *no numerable*, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

P1. [**¿Y las funciones epiyectivas?**]
Usando la propiedad de *el cardinal de la imagen de un conjunto*, demuestre que si $f : A \to B$ es epiyectiva, entonces $|B| \leq |A|$
Pregunta: ¿Que puede concluir de esto?

P2. Considere el conjunto $A \neq \emptyset$, se define el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \to A \mid f \text{ es función}\}$.

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$
Hint: para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$

b) Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathcal{F}$ tambien lo es.

P3. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ numerables. Demuestre que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es numerable.

P4. Demuestre que el conjunto de todos los triangulos cuyos vertices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.
Propuesto: ¿Que ocurre si, en el mismo problema, en vez de pensar en triángulos pensamos en polígonos?

P5. Demuestre que los números irracionales son no numerables

P6. Sea A no numerable y $B \neq \emptyset$, demuestre que $A \times B$ es no numerable.

Propuestos

P1. Un insecto debe cubrir, saltando de izquierda a derecha, la distancia desde 0 a 1 en una recta. En cada punto de su recorrido, el insecto puede elegir entre saltar directamente hacia el uno (y así completar su viaje), o avanzar la mitad del tramo que le falta por cubrir.
Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar nuestro insecto, es numerable.

P2. [**Cardinalidad del continuo**]

En esta pregunta usted demostrará que $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Para esto considere las siguientes funciones:

- Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$. A cada $S \subseteq \mathbb{N}$ asociamos el real $0.a_0a_1 \ldots a_i \ldots$, donde $a_i \in \{0,1\}$, y $a_i = 1$ si y sólo si $i \in S$
-

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\to 2^{\mathbb{Q}} \\ x &\mapsto \varphi(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}\end{aligned}$$

Hint: Le será útil recordar que $2^A = \mathcal{P}(A)$ y pensar en el *Teorema Cantor-Bernstein-Schöeder*

Nota: Al cardinal $|\mathbb{N}|$ lo llamaremos $\aleph_0$ (“aleph 0”), es decir $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Con esta pregunta, usted habrá demostrado que $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, este cardinal es conocido como el cardinal del continuo y lo llamaremos c, (es decir, $|\mathbb{R}| = c$).
la gran pregunta que uno puede realizar es ¿Existe un conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$?. La existencia de este A no se puede probar ni refutar. Y lo más raro es que la matemática sigue funcionando si se acepta o no la existencia de este A!!!. Si se asume que no existe este conjunto A, entonces el cardinal infinito sucesor de $\aleph_0$ es $c = \aleph_1$. A esto se le conoce como hipótesis del continuo