

## Pauta Auxiliar #9

$$\boxed{P_1} \quad \psi: \{0,1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\psi(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$$

S. logramos probar que  $\psi$  es biyectiva  
 $\Rightarrow |\{0,1\}^A| = |\mathcal{P}(A)|$

En efecto,

Recordemos que  $f$  es inyectiva ss.

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Supongamos (via contradicción) que  $\psi$  no es inyectiva, es decir

$$\exists h_1, h_2 \in \{0,1\}^A \quad \nexists \quad \psi(h_1) = \psi(h_2) \quad \text{ojo con esto!}$$

y  $h_1 \neq h_2$

notemos que como  $h_1, h_2 \in \{0,1\}^A$  funcionan

$$\Rightarrow h_1: A \rightarrow \{0,1\}, \quad h_2: A \rightarrow \{0,1\}$$

Luego como  $h_1 \neq h_2$  y sus dominios y cod. son iguales, deben diferenciarse en su "formula"

$$\Rightarrow \exists x \in A \quad \nexists \quad h_1(x) \neq h_2(x)$$

Luego, sin pérdida de generalidad

podemos suponer que  $h_1(x) = 0$  y  $h_2(x) = 1$

$$\Rightarrow x \in \psi(h_2) \text{ pero } x \notin \psi(h_1)$$

$$\Rightarrow \psi(h_2) \neq \psi(h_1)$$

$$\Rightarrow \Leftarrow \text{ pues se dijo que } \psi(h_2) = \psi(h_1)$$

---

### Epigeatividad

Sea  $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$  me basta

tomar la preimagen  $\bar{h}: A \rightarrow \{0,1\}$  tal que

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &= 1 & \text{si } x \in B \\ \text{y } \bar{h}(x) &= 0 & \text{si } x \notin B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(\bar{h}) = \{x \in A : \bar{h}(x) = 1\}$$

$$= \{x \in A : \overset{\downarrow}{x} \in B\}$$

$$= B$$

Luego  $\psi$  es biyectiva entre  
 $\{0,1\}^A$  y  $P(A)$

$$\therefore |\{0,1\}^A| = |P(A)|$$

---

**P2**  $\mathcal{C}$  es partición de  $A$

porq  $|A| = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C|$

En efecto, como  $\mathcal{C}$  es partición

se cumple que

- 1)  $\forall C \in \mathcal{C} \quad C \neq \emptyset$
- 2)  $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- 3)  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

En particular se cumple (2) y (3)

$$\Rightarrow \text{Como } A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \Rightarrow |A| = \left| \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right| \quad (*)$$

pero son el mismo cto

Luego como  $A$  es finito  $\Rightarrow C$  también es finito

$$\Rightarrow | \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C | = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| = |A|$$

Esto ultimo puer al ser finito hay una biyección con  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| = \sum_{i=1}^n |C_i|$$

---

**P3**  $A \cap B = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \quad |B| = |C|$

pdg  $|A \cup B| = |A \cup C|$

Debemos encontrar una función biyectiva entre  $A \cup B$  y  $A \cup C$ .

Como  $|B| = |C| \Rightarrow$  existe  $f: B \rightarrow C$  biyectiva

Definamos  $h: A \cup B \rightarrow A \cup C$

$$h(x) = \begin{cases} \text{id}_A(x) & x \in A \\ f(x) & x \in B \end{cases}$$

Notemos que no existe  $x \in A \cap B$  puer  
 $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$  Si  $h$  es biyectiva ¡GANAMOS!

Injectiva sea  $x_1, x_2 \in A \cup B$

tenemos 3 casos: 1)  $x_1 \in A$  y  $x_2 \in B$   
2)  $x_1 \in A$  y  $x_2 \in A$   
3)  $x_1 \in B$  y  $x_2 \in B$

Caso 1) Como  $x_1 \neq x_2$  pues  $A \cap B = \emptyset$

Como  $x_1 \in A \Rightarrow h(x_1) = \text{id}_A(x_1) = x_1 \in A$

$x_2 \in B \Rightarrow f(x_2) \in C$

y como  $A \cap C = \emptyset$   $x_1 \neq f(x_2)$

$\therefore$  Si  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

Caso 2) Como  $x_1, x_2 \in A$  si  $h(x_1) = h(x_2)$   
 $\Rightarrow \text{id}_A(x_1) = \text{id}_A(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Caso 3) Como  $x_1, x_2 \in A$  si  $h(x_1) = h(x_2)$   
 $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore h$  es inyectiva

Epigectiva: sea  $y \in A \cup C$  ↗ exclusivo

Como  $A \cap C = \emptyset \Rightarrow y \in A \vee y \in C$

Si  $y \in A$ , me basta tomar  $y \in A \cup B$

$$\text{Para } h(y) = \text{id}_A(y) = y$$

Si  $y \in C$ , como  $f: B \rightarrow C$  es epigectiva

$\Rightarrow$  existe  $b \in B$  tq  $f(b) = y$

Luego si  $y \in C$ , me basta tomar  $b$

$$\text{tal que } h(b) = f(b) = y$$

$\therefore h$  es epigectiva

(tambien se pudo  
tomar  $f^{-1}(y)$   
por  $f$  es biyectiva)

$\therefore h$  es biyectiva

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A \cup C|$$

**P4** por  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| \quad \forall n \geq 2$

Inducción:

Case Base:  $n=2$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^2 A_i \right| &= |A_1 \cup A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &\leq |A_1| + |A_2| \\ &= \sum_{i=1}^2 |A_i| \end{aligned}$$

HI:  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$

Paso inductiva: probemos que  $\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |A_i| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \quad \square \end{aligned}$$