MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 9: Conjuntos finitos

25 de mayo de 2017

P1. Sea A un conjunto finito. Demuestre que $|\{0,1\}^A| = |\mathcal{P}(A)|$. Para esto consideré la siguiente función

$$\begin{aligned}\Psi : \{0,1\}^A &\to \mathcal{P}(A)\\ h &\mapsto \Psi(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}\end{aligned}$$

P2. Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A. Demuestre que $|A| = \sum_{C \in \mathcal{C}} C$

P3. Sean A, B, C conjuntos finitos tales que $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$. Demuestre que

$$|A \cup B| = |A \cup C|$$

P4. Sea $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, no necesariamente disjuntos. Demuestre que

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Propuestos

P1. Se definen los números armónicos como:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Demuestre por inducción que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

P2. **[C4-2007]** Se pide calcular en función de n, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

procediendo como se indica:

a) Escriba la suma de los términos pares usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Escriba la suma de los términos impares usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Use esto para calcular la suma pedida al inicio.

P3. [**C4-2013**] Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ un número natural fijo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$ un número impar cualquiera. Demuestre, sin usar inducción, que la suma de los n naturales consecutivos a partir de k_0 es divisible por n

P4. [**C4-2013**] Considere, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \cdots + \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P5. [**C4-2007**] Demuestre, sin usar inducción, que dado $p \in R$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = pn, \quad \forall n \geq 1$$

P6. [**C4-2012**] Sea $n \in \mathbb{N}$ un natural cualquiera. Se define, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} k^j$$

a) Demuestre que

$$\sum_{l=0}^{j} \binom{j+1}{l} S_l = (n+1)^{j+1}$$

b) Usea (a) para probar que

$$S_j = \frac{(n+1)^{j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l}{j+1}$$

P7. [**C4-2015**] Demuestre sin usar inducción que:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

P8. [**Dificil**] Demuestre por inducción, $\forall n \geq 2$, el principio de inclusión-exclusión, es decir,

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{(n+1)} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$