MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Extra C4: Más sumas y binomio de newton

24 de mayo de 2017

- Se define una doble sumatoria como una suma $\sum_{k=n}^{m} b_k$. En donde $b_k = \sum_{i=p}^{q} a_{i,k}$. Es posible escribir esto como $\sum_{k=n}^{m} b_k = \sum_{k=n}^{m}\sum_{i=p}^{q} a_{i,k}$
  Las sumatorias múltiples se definen del mismo modo.
- En una sumatoria múltiples, si los limites superiores e inferiores no dependen de los índices entonces se pueden intercambiar las sumatorias, es decir
  $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$
- $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_k \cdot b_j) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j)$$
  Esto ocurre siempre que a_k no dependa del índice j, pues se considera constante para la sumatoria más interna
- Factorial de número:
  $$n! = n \cdot (n-1)!, \text{ donde } 0! = 1$$
  $$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$
- Coeficiente binomial:
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, \ k \leq n$$
  Representa la cantidad subconjuntos de tamaño k que puedo extraer de un conjunto de tamaño n.
- Binomio de newton:
  $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
  Mucho cuidado con esta estructura!

P1. *a)* Sea $m \in \mathbb{N}, m \geq 5$. Calcule:
$$\sum_{i=5}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{i+1}{j(j+1)}$$

b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \{(n-p) \in \mathbb{N} : 0 \leq p < n \ , p \in \mathbb{N}\}$. Calcule:
$$\sum_{j\in\Omega}\sum_{k=1}^{j}(k + \frac{2^j}{j})$$

P2. Determine el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo de $(3x+2)^{14}$ son iguales.

P3. *a)* Sean m, k, n naturales tal que $m \leq k \leq n$. Pruebe, usando argumentos combinatoriales o desarrollando las expresiones, que:
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \quad \text{y} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

b) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = 3^n$$

P4. Pruebe sin usar inducción que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}\ ,\quad \forall n \geq 1$$

Hint: estudie la expresión $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

P5. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ conjuntos finitos. Demuestre que

a) si $|A| \leq |B| \wedge B \subseteq C \Longrightarrow |A| \leq |C|$

b) $|A \times B| = |B \times A|$