MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 8: Sumatorias

12 de mayo de 2017

- $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{(p+1)} + a_{(p+2)} + \cdots + a_{(q-1)} + a_q$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \pm b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
- **Traslación de índices**
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$ para $m \leq s < n$
- **telescópica:**
$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
obs: para las 3 sumas anteriores, si parten de 0 o de 1 es la misma formula
- **Geometrica:**
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$
para $r \neq 1$

P1. Calcule las siguientes sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln(1 + \frac{1}{k})$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kln(1 + \frac{1}{k})$

P2. Escriba la siguiente suma en notación de sumatoria y luego calcule su valor

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

P3. Muestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

P4. Definamos para $n \geq 1, r \neq 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k$$

a) Demuestre sin usar inducción que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

b) Demuestre sin usar inducción que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

P5. **[Propuestos]** Calcule las siguientes sumas

a) $\sum_{k=p}^{q} k(k+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{k-3}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$

d) $\sum_{k=0}^{n} kk!$

e) $\sum_{k=1}^{n} cos((2k-1)x)$

Hint: multiplique la expresion por $2sin(x)/2sin(x)$ y utilize la siguiente identidad trigonométrica. $sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta) = 2sin(\beta)cos(\alpha)$