

Resolución Aux # 7

PL

Sea $A, B, W \subseteq E$ pda

$$(A \cap W) \subseteq (B \cap W) \wedge (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c) \Rightarrow A \subseteq B$$

Forma 1: Recordemos que
se pueden unir las
inclusiones!

$$\begin{array}{l} A \subseteq B \\ \cup \\ C \subseteq D \\ \hline A \cup C \subseteq B \cup D \end{array}$$

$$\text{Entonces si } \begin{array}{l} A \cap W \subseteq B \cap W \\ \wedge \\ A \cap W^c \subseteq B \cap W^c \end{array}$$

$$\Rightarrow (A \cap W) \cup (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W) \cup (B \cap W^c)$$

$$\Rightarrow A \cap (W \cup W^c) \subseteq B \cap (W \cup W^c)$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

que es lo que
queríamos probar

Forma 2: Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in W$ ①
o bien $x \in A \wedge x \in W^c$ ②

$$\textcircled{1} \text{ Si } x \in A \cap W \Rightarrow x \in B \cap W \Rightarrow x \in B$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } x \in A \cap W^c \Rightarrow x \in B \cap W^c \Rightarrow x \in B$$

Luego en cualquier caso, si $x \in A \Rightarrow x \in B$
 $\therefore A \subseteq B$

P21 Encontrar el menor $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $2^n + 4^n < 5^n$

$$n=0 \rightarrow 2^0 + 4^0 < 5^0 \\ \Leftrightarrow 1 + 1 < 1 \quad \text{Falso } X$$

$$n=1 \rightarrow 2^1 + 4^1 < 5^1 \\ \Leftrightarrow 2 + 4 < 5 \quad \text{Falso } X$$

$$n=2 \rightarrow 2^2 + 4^2 < 5^2 \\ \Leftrightarrow 4 + 16 < 25 \\ \Leftrightarrow 20 < 25 \quad \text{Verdadero } \checkmark$$

Luego $n_0 = 2$. Probemos ahora que $\forall k \geq 2$
 $2^k + 4^k < 5^k$

En efecto, procedamos por inducción.

Caso base: $n_0 = 2$ $2^2 + 4^2 < 5^2 \Leftrightarrow \checkmark$
Lo comprobamos antes

Hipotesis inductiva: $\exists n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$, tq $2^n + 4^n < 5^n$

Paso inductivo: debemos probar que $2^{n+1} + 4^{n+1} < 5^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, sea } 5^{n+1} &= 5 \cdot 5^n \\ &> 5 \cdot (2^n + 4^n) && \rightarrow \text{Hipotesis inductiva} \\ &= 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n \\ &> 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 4^n && \swarrow 5 > 2 \text{ y } 5 > 4 \\ &= 2^{n+1} + 4^{n+1} \end{aligned}$$

P3 $f: P(U) \rightarrow P(U)$
 $X \mapsto f(X) = A \cap (B \cup X)$

a) pda $f^k = f \quad \forall k \geq 2$

Recordemos que 2 funciones son iguales si ocurre que

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \\ \text{Cod}(f) = \text{Cod}(g) \\ \forall x \in \text{Dom}(f) \quad f(x) = g(x) \end{cases}$$

Con esto en mente procedamos por inducción

CASO BASE: $k=2$, debemos probar que $f^2 = f$

Notemos que $f^2 = f \circ f$, $f \circ f: P(U) \rightarrow P(U)$
ya que $f: P(U) \rightarrow P(U)$

por lo que $\begin{cases} \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f^2) = P(U) \\ \text{Cod}(f) = \text{Cod}(f^2) = P(U) \end{cases}$

Falta ver que $\forall X \in P(U) \quad f^2(X) = f(X)$

En efecto, sea $X \in P(U)$ arbitrario !!!

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^2(X) &= f \circ f(X) = f(f(X)) && \text{formula } f(X) \\ &= f(A \cap (B \cup X)) && \text{formula } f(X) \\ &= A \cap [B \cup (A \cap (B \cup X))] && f(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Distrib} \quad \hookrightarrow = A \cap [(B \cup A) \cap (B \cup (B \cup X))] \\
 & \text{Asocio} \quad \hookrightarrow = A \cap [(B \cup A) \cap ((B \cup B) \cup X)] \\
 & B \cup B = B \quad \hookrightarrow = A \cap [(B \cup A) \cap (B \cup X)] \\
 & \text{Asocio} \quad \hookrightarrow = [A \cap (B \cup A)] \cap (B \cup X) \\
 & A \subseteq A \cup B \quad \hookrightarrow = A \cap (B \cup X) \\
 & \quad \quad \quad = f(X) \quad \swarrow \text{formula } f(x)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f^2 = f$$

$$\text{HI: } \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ tq } f^k = f$$

Paso inductivo: debemos probar que $f^{k+1} = f$

En efecto, por definición

$$\begin{aligned}
 f^{k+1} &= f^k \circ f \\
 &= f \circ f \quad \swarrow \text{HI: } f^k = f \\
 &= f^2 \\
 &= f \quad \swarrow \text{CASO BASE!}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f^k = f \quad \forall k \geq 2$$

P3.

b) Debemos probar que

① si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no es inyectiva

y ② si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no es epyectiva

Problemas ① Supongamos que $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$
(a) (b)

(a) si $A \neq U \Rightarrow \exists x \in U$ tal $x \notin A$
 $\rightarrow x \in A^c$

Sea $\exists x \in P(U)$, $\exists x \in A^c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\exists x) &= A \cap (B \cup \exists x) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \exists x) \\ &= (A \cap B) \cup \emptyset \quad \text{pues } x \in A^c \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

Por otro lado, $\emptyset \in P(U)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\emptyset) &= A \cap (B \cup \emptyset) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\text{Luego } A \cap B = f(\emptyset) = f(\exists x)$$

pero $\emptyset \neq \exists x \quad \therefore f$ no es inyectiva

Si ocurre (b), es decir, $B \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}\text{Si } B \neq \emptyset &\Rightarrow \exists b \in B \\ &\Rightarrow \{b\} \subseteq B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\{b\}) &= A \cap (B \cup \{b\}) \\ &= A \cap B\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \{b\} \subseteq B$$

por otro lado

$$\begin{aligned}f(\emptyset) &= A \cap (B \cup \emptyset) \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

Luego f no es inyectiva

Veamos ahora que si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no es epyectiva
(c) (d)

$$\begin{aligned}\text{(c): Si } A \neq U &\Rightarrow \exists x \in U \text{ tal que } x \notin A \\ &\Rightarrow A^c \neq \emptyset\end{aligned}$$

$$\text{Luego, } f(x) = A \cap (B \cup x)$$

$$\Rightarrow f(x) \subseteq A \quad \text{pues } A \cap Y \subseteq A \quad \forall Y$$

$\therefore f(x)$ no puede tomar el valor A^c
 $\Rightarrow$ no es epyectiva

(d): Si $B \neq \emptyset$, si $A \neq U$ ya sabemos que f no será sobreyectiva, por lo que el único caso de interés es que $A = U$

$$\text{Si } B \neq \emptyset \text{ y } A = \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap (B \cup X) \\ = \mathcal{U} \cap (B \cup X) \\ = B \cup X$$

$$\text{Ahora, Como } B \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in B$$

$$\Rightarrow \text{Como } y \in B \Rightarrow y \in B \cup X$$

$$\text{Luego } B \cup X \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow f(x) \neq \emptyset \text{ y } \emptyset \in P(\mathcal{U})$$

$\therefore f$ no es epyectiva

c) Sabemos de (b) que

$$\begin{aligned} A \neq \mathcal{U} \text{ o } B \neq \emptyset &\Rightarrow f \text{ no es inyectiva} \\ \wedge A \neq \mathcal{U} \text{ o } B \neq \emptyset &\Rightarrow f \text{ no es epyectiva} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Por contrareciproca

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\Rightarrow A = \mathcal{U} \text{ y } B = \emptyset \\ \wedge f \text{ es epyectiva} &\Rightarrow A = \mathcal{U} \text{ y } B = \emptyset \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \text{ es biyectiva} \Rightarrow A = \mathcal{U} \text{ y } B = \emptyset$$

por lo que esto nos sugiere tomar

$$A = U \quad \text{y} \quad B = \emptyset$$

$$\rightarrow f: P(U) \rightarrow P(U)$$

$$f(X) = A \cap (B \cup X)$$

$$= U \cap (\emptyset \cup X)$$

$$= U \cap X$$

$$= X$$

$\Rightarrow f(X) = X$ es la identidad!
y claramente es
biyectiva

P4

a) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x \Omega y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$$

porq Ω es orden
parcial

Reflexiva: Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \Omega x \Leftrightarrow (x - x) \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow 0 \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \checkmark$

Antisimétrica: Sea $x, y \in \mathbb{R}$ tq

$$x \Omega y \wedge y \Omega x$$

$$\Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N} \wedge (x - y) \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow K \in \mathbb{N} \wedge -K \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow K = x - y$$

Luego K y $-K$ son naturales

$\Rightarrow$ la única opción es que $K = 0$

$$\Rightarrow K = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

Transitiva: Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$ tq

$$x \leq y \wedge y \leq z$$

$$\Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N} \wedge (z-y) \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (y-x) + (z-y) \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow z - x \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x \leq z \quad \therefore \text{es de orden}$$

Veamos que es de orden parcial.

En efecto, vemos que no es total
es decir $\exists x, y \in \mathbb{R} \quad x \not\leq y \wedge y \not\leq x$

Notemos que $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}$

$$\wedge b \leq a \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{N}$$

Idea

¿Que ocurre si encontramos dos números cuya resta (independiente de cual sea el minuendo y cual el sustraendo) de como resultado un $n \notin \mathbb{N}$?

$$\text{Sea } \pi \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Luego} \quad \frac{\pi}{2} \not\leq \pi$$

Del mismo modo

$$\frac{11}{2} - 11 = -\frac{11}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 11 \not\sim \frac{11}{2}$$

!! encontramos 2 números que no son comparables, es decir, comprobamos que

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \quad x \not\sim y \quad \wedge \quad y \not\sim x$$

$\therefore$ es de orden parcial

$$b) \quad \Phi \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \Phi y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$

• Reflexiva y transitiva análogas a la parte (a)

• Simétrica: sea $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \Phi y$

$$\Rightarrow x \Phi y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -(y - x) \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \Phi x$$

$\therefore \Phi$ es de equivalencia

Estudiamos $[p]_{\mathbb{Z}}$ con $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \rightarrow [p]_{\mathbb{Z}} &= \{x \in \mathbb{R} : x \notin p, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (p-x) \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (p-x) = k, k, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = p-k, k, p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = p-k, p-k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

P5

$f: X \rightarrow Y$ una función $R \subseteq Y \times Y$

a) Relación preimagen $f^{-1}(R) \subseteq X \times X$

$$x_1 f^{-1}(R) x_2 \Leftrightarrow f(x_1) R f(x_2)$$

b) pda $f^{-1}(R)$ es de equivalencia; notar antes que si $x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

Refleja: sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x f^{-1}(R) x &\Leftrightarrow f(x) R f(x) \\ &\Leftrightarrow \checkmark, \text{ pues } R \text{ es refleja} \\ &\quad \text{y } f(x) \in Y \end{aligned}$$

Simétrica: Sea $x_1, x_2 \in R$ tq $x_1 f^{-1}(R) x_2$

$$\Rightarrow x_1 f^{-1}(R) x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x_1) R f(x_2)$$

$$\rightarrow f(x_2) R f(x_1) \quad \downarrow R \text{ es Simétrica}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} x_2 f^{-1}(R) x_1$$

Transitiva: Sea $a, b, c \in X$ tq $a f^{-1}(R) b \wedge b f^{-1}(R) c$

$$\Rightarrow a f^{-1}(R) b \wedge b f^{-1}(R) c$$

$$\iff f(a) R f(b) \wedge f(b) R f(c)$$

$$\Rightarrow f(a) R f(c) \quad \text{pues } R \text{ es transitiva}$$

$$\iff a f^{-1}(R) c$$

$\therefore f^{-1}(R)$ es de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva

2) pda $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$

sea $w \in f^{-1}([f(x)]_R)$ $\stackrel{\text{cto preimagen}}{\iff} f(w) \in [f(x)]_R$

$$\iff f(w) R f(x)$$

$$\iff w f^{-1}(R) x$$

$$\iff w \in [x]_{f^{-1}(R)}$$

b) $f: X \rightarrow Y$ epyectiva $R' \subseteq X \times X$ de equivalencia

Relación Imagen $f(R') \subseteq Y \times Y$

[Notemos que como f es epyectiva]
 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$

$$y_1, f(R') y_2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \\ \wedge x_1 R' x_2$$

pdq: $f(R')$ es de equivalencia si f es inyectiva

Refleja: sea $\bar{y} \in Y \xRightarrow{\text{epyec}} \exists \bar{x} \in X, f(\bar{x}) = \bar{y}$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 = \bar{x}, \text{ t.q. } f(x_1) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge f(x_2) = f(\bar{x}) = \bar{y}$$

y como R' , si $a \in X \Rightarrow a R' a$
es refleja

$$\text{Luego si } \bar{y} \in Y \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 = \bar{x} \text{ t.q. } f(x_1) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge f(x_2) = f(\bar{x}) = \bar{y} \\ \wedge x_1 R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} f(R') \bar{y} \quad \therefore \text{ es refleja}$$

Simétrica: Sea $y_1, y_2 \in Y$ t.q. $y_1 f(R') y_2$
queremos probar que $y_2 f(R') y_1$

$\Rightarrow$ Si $y_1 f(R') y_2$

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2$

$\Leftrightarrow \exists x_2, x_1 \in X, f(x_2) = y_2 \wedge f(x_1) = y_1 \wedge x_2 R' x_1$

pues " $\wedge$ " conmuta y " R' " es simétrica

$\Leftrightarrow y_2 f(R') y_1$

$\therefore f(R')$ es simétrica

Transitiva: Sea $y_1, y_2, y_3 \in Y$ t.q.

$y_1 f(R') y_2 \wedge y_2 f(R') y_3$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(x_1) = y_1 \wedge (f(x_2) = y_2) \wedge x_1 R' x_2$

$\wedge \exists x'_2, x_3 \in X, (f(x'_2) = y_2) \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x'_2 R' x_3$

A priori x_2 y x'_2 son distintos, pero...

Como $f(x_2) = y_2 \wedge f(x'_2) = y_2$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x'_2) \xRightarrow{\text{Inyectiva}} x_2 = x'_2$

Luego $x_2 = x_2'$ por lo que las expresiones quedan

$$\begin{aligned} & \exists x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2 \\ & \wedge \exists x_2, x_3 \in X \quad f(x_2) = y_2 \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x_2 R' x_3 \end{aligned}$$

En particular se puede concluir que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in X, & f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge f(x_3) = y_3 \\ & \wedge x_1 R' x_2 \wedge x_2 R' x_3 \end{aligned}$$

Como R' es transitiva $\Rightarrow x_1 R' x_3$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_3 \in X \quad f(x_1) = y_1 \wedge f(x_3) = y_3 \wedge x_1 R' x_3$$

$$\Leftrightarrow y_1 f(R') y_3$$

$\therefore f(R')$ es transitiva y por lo tanto es de equivalencia

Ahora probemos que $R' = f^{-1}(f(R'))$

Notar que hay que probar una igualdad de conjuntos

$R' \subseteq X \times X$ por lo que en R' viven pares ordenados

pdg $R' = f^{-1}(f(R'))$
doble inclusión

⊇ Sea $(a, b) \in f^{-1}(f(R'))$ arbitrario

$$\Rightarrow a \in f^{-1}(f(R')) \wedge b$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a) \in f(R') \wedge f(b)$$

en (a) se definió la relación preimagen

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x_1, x_2 \in X, f(a) = f(x_1) \wedge f(b) = f(x_2) \wedge x_1 R' x_2$$

$\Rightarrow$ como f es inyectiva

$$f(x_1) = f(a) \Rightarrow x_1 = a$$

$$f(x_2) = f(b) \Rightarrow x_2 = b$$

Luego, como $x_1 R' x_2 \Leftrightarrow a R' b$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in R'$$

$$\therefore (a, b) \in f^{-1}(f(R')) \Rightarrow (a, b) \in R'$$

≡ probemos ahora que

$$\text{si } (a,b) \in R' \Rightarrow (a,b) \in f^{-1}(f(R'))$$

Procedamos por contradicción.

$$\text{Sea } \underbrace{(a,b) \in R'}_{\textcircled{1}} \wedge \underbrace{(a,b) \notin f^{-1}(f(R'))}_{\textcircled{2}}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \quad a \in X \wedge b \in X$$

$$\text{de } \textcircled{2}, \text{ que } (a,b) \notin f^{-1}(f(R'))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, f(a) = f(x_1) \wedge f(b) = f(x_2) \wedge x_1 R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, f(a) \neq f(x_1) \vee f(b) \neq f(x_2) \vee x_1 R' x_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall x_1, x_2 \in X, f(a) \neq f(x_1) \right\} \text{ (i)}$$

$$\vee \left\{ \forall x_1, x_2 \in X, f(b) \neq f(x_2) \right\} \text{ (ii)}$$

$$\vee \left\{ \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 R' x_2 \right\} \text{ (iii)}$$

Si se cumple (i), se tiene que $f(a) \neq f(x_1) \quad \forall x_1 \in X$

pero esto es falso, pues $a \in X$ pues $(a,b) \in R'$

$$\Rightarrow \text{si } x_1 = a \Rightarrow f(a) \neq f(a) \Rightarrow \Leftarrow \text{Contradicción}$$

- Si se cumple (ii) es el mismo argumento

$$x_2 = b \Rightarrow f(b) \neq f(b) \Rightarrow \Leftarrow \text{Contradicción}$$

- Si se cumple (iii) se tiene que

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 R' x_2$$

sin embargo sabemos que $(a, b) \in R'$

$\Rightarrow a R' b$ por lo que se tiene una Contradicción

$\Rightarrow \Leftarrow$

2) Si f no fuera inyectiva la transitividad no se tendría