MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 7 - Recuperativo

11 de Mayo de 2017

P1. **[Conjuntos]** Sean A, B, W subconjuntos de un conjunto universo E. Demuestre que:

$$(A \cap W) \subseteq (B \cap W) \wedge (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c) \Longrightarrow A \subseteq B$$

P2. **[Inducción]** Encontrar el primer $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^n + 4^n < 5^n$. Luego, mediante inducción, compruebe que esto es valido para todo natural $n \geq n_0$.

P3. **[funciones e inducción]** Para esta pregunta necesitará la definición recursiva para composición de funciones:
Sea $f : A \to A$, una función (no necesariamente biyectiva) entonces:

$$f^0 = id_A \quad y \quad f^n = f^{n-1} \circ f \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universo y $A, B \subseteq \mathcal{U}$ Se define:

$$\begin{aligned} f : P(\mathcal{U}) &\to P(\mathcal{U}) \\ X &\mapsto f(X) = A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

a) Pruebe que $f^k = f, \ \forall k \geq 2$

b) Si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es inyectiva ni epiyectiva.

c) Define A y B para que f sea biyectiva y comente sobre el nuevo comportamiento de la función.

P4. **[Relaciones]**

a) Se define en $\mathbb{R}$ la relacion Ω dada por: $x \Omega y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.
Demuestre que Ω es una relación de orden parcial.

b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como: $x \Phi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$.
Demuestre que Φ es de equivalencia y determine $[p]_\Phi$ con $p \in \mathbb{Z}$

P5. [**Relaciones y funciones**] Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función.

a) Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de $\mathcal{R}$ que notamos $f^{-1}(\mathcal{R})$ por:

$$x_1 \; f^{-1}(\mathcal{R}) \; x_2 \iff f(x_1) \; \mathcal{R} \; f(x_2)$$

1) Probar que $f^{-1}(\mathcal{R})$ es una relación de equivalencia en X
2) Probar que $[x]_{f^{-1}(\mathcal{R})} = f^{-1}([f(x)]_{\mathcal{R}})$ para cada $x \in X$
Indicación: Notar que hay que probar una igualdad de conjuntos y que $[f(x)]_{\mathcal{R}}$ es un subconjunto de Y.

b) Suponga ahora que $\mathcal{R}'$ es una relación de equivalencia en X y que f es epiyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y_1 \; f(\mathcal{R}') \; y_2 \iff \exists x_1, x_2 \in X, \; f(x_1) = y_1 \quad \wedge \quad f(x_2) = y_2 \quad \wedge \quad x_1 \; \mathcal{R}' \; x_2$$

1) Probar que si f es inyectiva entonces $f(\mathcal{R}')$ es de equivalencia y además pruebe que $\mathcal{R}' = f^{-1}(f(\mathcal{R}'))$, es decir, $\mathcal{R}'$ es igual a la relación preimagen de $f(\mathcal{R}')$
2) ¿Que ocurre si f no fuera inyectiva?
Propuesto: Defina f tal que no sea inyectiva y $f(\mathcal{R}')$ no esa de equivalencia