MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Guia - Control Recuperativo

P1. Se define el conectivo lógico $\oplus$ como

$$p \oplus q \Leftrightarrow F \text{ si y sólo si } p \Leftrightarrow F \text{ y } q \Leftrightarrow F$$
$$p \oplus q \Leftrightarrow V \text{ para cualquier otro valor de } p \text{ y } q$$

Determine si la proposicón
$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$
es una tautología.

P2. [**Desafio**] Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

a) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.

b) Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.

c) Sea $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S.
Puede usar materia de introducción al cálculo para la parte c.

P3. Demuestre que si A, E, D cumplen que $A \cap (E \cup D)^c = \phi$ entonces

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap D)$$

P4. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universo, demuestre que:

$$\forall X, Y \in P(\mathcal{U}), (A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y) \Longrightarrow A = \emptyset$$

P5. Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

a) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.

b) $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.

c) $(\forall\ X \in M)(\forall\ Y \in \mathcal{P}(E))\ X \cap Y \in M$.

d) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

P6. Usando inducción, demuestre que cada termino de la secuencia

$$12, 102, 1002, 10002, \ldots$$

es divisible por 6.

P7. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

P8. Se considera la sucesión definida por la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 6$$

Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, el numero $\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ es múltiplo de 4.

P9. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x - y$ es factor de $x^n - y^n$

P10. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto. Considere $\mathcal{F} = \{h : E \to E \mid h \text{ es biyectiva}\}$ y $f \in \mathcal{F}$

a) Pruebe que $\forall h \in \mathcal{F},\ h \circ f \in \mathcal{F}$

b) Sea $\phi_f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $\phi_f(h) = h \circ f$. Pruebe que ϕ_f es biyectiva.

P11. Sea $f : E \to F$ una función. Probar que f es biyectiva si y solo si:

$$(\forall B \subseteq E) f(B^c) = (f(B))^c$$

P12. Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función epiyectiva.

P13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$.

a) Probar que f es una función biyectiva.

b) Probar que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y.

P14. Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es conexa $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, aRb \vee bRa$. Demuestre que si R es simétrica, transitiva y conexa entonces R es de equivalencia.

P15. Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Para $R_1, R_2 \in A$. Definimos la relación binaria siguiente:

$$R_1 \Omega R_2 \iff [(\forall x, y \in R)(x R_1 y \implies x R_2 y)]$$

Pruebe que Ω es de orden y decida si es de orden parcial o total.

P16. Se define la relación $\mathcal{T}$ en $\mathbb{N}$ por:

$$n \mathcal{T} m \iff \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$$

a) Demuestre que $\mathcal{T}$ es de equivalencia.

b) Determine $[0]_{\mathcal{T}}, [1]_{\mathcal{T}}, [2]_{\mathcal{T}}, [3]_{\mathcal{T}}, [4]_{\mathcal{T}}$

c) Calcule $\mathbb{N}/\mathcal{T}$