

Resolución Aux #6

P1

en $\mathbb{N}$ se define T tal que

$$m T n \Leftrightarrow (m=n) \vee (2|m \wedge 2|n)$$

para T es de equivalencia y encuentre

Reflexiva: sea $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n=n$ es verdadero

$$\Rightarrow [n=n \vee (\text{cualquier cosa})] \text{ es } V$$

$$\Rightarrow [n=n \vee (2|n \wedge 2|n)] \text{ es } V$$

$$\Leftrightarrow n T n$$

□

También se puede ver como

$$n T n \Leftrightarrow n=n \vee (2|n \wedge 2|n)$$

$$\Leftrightarrow V \vee (2|n \wedge 2|n)$$

$$\Leftrightarrow V$$

Simétrica: Sea $n, m \in \mathbb{N}$ t.q. $n T m$

$$\Rightarrow n T m \Leftrightarrow (n = m) \vee (2|n \wedge 2|m)$$

Simetría de $\Leftrightarrow (m = n) \vee (2|m \wedge 2|n)$ Comute

"="

$$\Rightarrow m T n$$

□

Transitiva: Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$ t.q. $x T y$ y $y T z$

$$\Rightarrow x T y \wedge y T z \dots \text{MATRACA } \boxed{\text{FORMA!}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)]}_P \wedge \underbrace{[(y=z) \vee (2|y \wedge 2|z)]}_S$$

$$\textcircled{Q} \wedge (\textcircled{r} \vee \textcircled{s})$$

Distribuyo

$$\Rightarrow \left[[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)] \wedge (y=z) \right] \vee \left[[(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)] \wedge (2|y \wedge 2|z) \right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{[(x=y) \wedge (y=z)]}_{\textcircled{1}} \vee \underbrace{[2|x \wedge 2|y \wedge y=z]}_{\textcircled{2}} \vee \underbrace{[(x=y) \wedge 2|y \wedge 2|z]}_{\textcircled{3}} \vee \underbrace{[2|x \wedge 2|y \wedge 2|y \wedge 2|z]}_{\textcircled{4}}$$

$$\Rightarrow (x=z) \vee (2|x \wedge 2|z) \vee (2|x \wedge 2|z) \vee (2|x \wedge 2|z)$$

$$\Rightarrow (x=z) \vee (2|x \wedge 2|z)$$

Forma 2: por casos

$$x \sim y \wedge y \sim z$$

$$\Rightarrow [(x=y) \vee (2|x \wedge 2|y)] \wedge [(y=z) \vee (2|y \wedge 2|z)]$$

Se analizarán 4 casos ya que

$$\text{Si } (p \vee q) \wedge (r \vee s) \Leftrightarrow V$$

$$\Rightarrow p \vee q \Leftrightarrow V \Rightarrow (p \Leftrightarrow V \vee q \Leftrightarrow V) \\ \wedge r \vee s \Leftrightarrow V \Rightarrow (r \Leftrightarrow V \wedge s \Leftrightarrow V)$$

Luego...

$$\text{Caso 1: } [p \Leftrightarrow V \wedge r \Leftrightarrow V]$$

$$\text{Si: } x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$$

por trans
de "="

$$\text{Luego } x \sim z$$

$$\text{Caso 2: } p \Leftrightarrow V \wedge s \Leftrightarrow V$$

$$\text{Si } (x=y) \wedge (2|y \wedge 2|z)$$

$$\Rightarrow 2|y \Leftrightarrow 2|x \text{ pues } x=y$$

$$\Rightarrow 2|y \wedge 2|z \Leftrightarrow 2|x \wedge 2|z$$

$$\therefore x \sim z$$

Caso 3: $[(q \Leftrightarrow v) \wedge (r \Leftrightarrow v)]$

Si $(2|x \wedge 2|y) \wedge (y=z)$

$\Rightarrow$ análogamente $2|y \Leftrightarrow 2|z$

$\Rightarrow 2|x \wedge 2|y \Leftrightarrow 2|x \wedge 2|z \quad \therefore x \tau z$

Caso 4: $[(q \Leftrightarrow v) \wedge (s \Leftrightarrow v)]$

Si $(2|x \wedge 2|y) \wedge (2|y \wedge 2|z)$

en particular $2|x \wedge 2|z \quad \therefore x \tau z$

$\therefore R$ es transitiva, reflexiva y simétrica
por lo tanto es de equivalencia

Veamos que $\mathbb{N}/\tau = \{ [x]_{\tau} / x \in \mathbb{N} \}$

Problemas números

$$[0]_{\tau} = \{ y \in \mathbb{N} / 0 \tau y \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{N} / 0=y \vee (2|0 \wedge 2|y) \}$$

$2|0$ es verdadero. Luego si y es par
 $\Rightarrow 2|y$

$\therefore$ Los pares cumplen que $2|0 \wedge 2|y_{\text{par}}$

Cumpliendo que se relacionan con 0

$$\Rightarrow \{0\} = \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

por otro lado

$$[1]_T = \{z \in \mathbb{N} \mid 1 \neq z\} \quad \rightarrow 2 \text{ no divide a } 1$$

$$= \{z \in \mathbb{N} \mid (1 = z) \vee (2 \mid 1 \wedge 2 \mid z)\}$$

$$= \{z \in \mathbb{N} \mid 1 = z \vee \text{F}\}$$

$$= \{z \in \mathbb{N} \mid 1 = z\}$$

$$= \{1\}$$

$$[3]_T = \{y \in \mathbb{N} \mid (3 = y) \vee (2 \mid 3 \wedge 2 \mid y)\} \quad \rightarrow 2 \text{ no divide a } 3$$

$$= \{y \in \mathbb{N} \mid 3 = y \vee \text{F}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{N} \mid 3 = y\}$$

$$= \{3\}$$

$$[2k+1]_T = \{y \in \mathbb{N} \mid (2k+1 = y) \vee (2 \mid 2k+1 \wedge 2 \mid y)\} \quad \rightarrow \text{Falso}$$

$k \in \mathbb{N}$

$$= \{y \in \mathbb{N} \mid 2k+1 = y \vee \text{F}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{N} \mid 2k+1 = y\}$$

$$= \{2k+1\}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{N}/\gamma &= \{ [0], [1], [3], [5], \dots \} \\ &= \{ [0] \} \cup \{ [1], [3], [5], \dots \} \\ &= \{ [0] \} \cup \{ [2k+1] \mid k \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

P2 Sea $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow (a,b) \equiv_2 c+3d$$

probar que R es de equivalencia

Reflexiva: $(a,b) R (a,b) \Leftrightarrow (a,b) \equiv_2 a+3b$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a+b - (a+3b) = 2k$$

$$\Leftrightarrow a+b - a - 3b = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -2b = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2(k+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad \forall \quad \text{pues } k+b \in \mathbb{Z}$$

Symmetrie: Seien $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\vdash_g (a,b) R (c,d)$

$$\Rightarrow (a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a+b \equiv_{\mathbb{Z}} c+3d$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, a+b - c - 3d = 2n \quad | - - 1$$

$$\Rightarrow c+3d - a - b = -2n \quad | n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c+d + 2d - a - 3b + 2b = -2n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c+d - a - 3b + 2d + 2b = -2n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c+d - a - 3b = -2n - 2d - 2b \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c+d - a - 3b = 2(-n - d - b) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c+d - a - 3b = 2n' \quad n' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow c+d \equiv_{\mathbb{Z}} a+3b$$

$$\Leftrightarrow (c,d) R (a,b)$$

Transitiva: $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad +_3$

$$(a,b) R (c,d) \quad \wedge \quad (c,d) R (e,f)$$

$$\Rightarrow a+b \equiv_2 c+3d \quad \wedge \quad c+d \equiv_2 e+3f$$

$$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \quad a+b-c-3d = 2k_1 \quad \wedge \quad c+d-e-3f = 2k_2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} a+b-c-3d = 2k_1 \\ + \quad c+d-e-3f = 2k_2 \\ \hline \end{array} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a+b-2d-e-3f = 2(k_1+k_2) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a+b-e-3f = 2(\underbrace{k_1+k_2+d}_{\in \mathbb{Z}}) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a+b \equiv_2 e+3f$$

$$\Rightarrow (a,b) R (e,f) \quad \checkmark$$

Notemos que

$$[(0,0)]_R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (0,0) R (x,y) \}$$

$$= \{ \quad \% \quad : (x,y) R (0,0) \}$$

$$= \{ \quad \% \quad : x+y \equiv_2 0 \}$$

$$= \{ \quad \% \quad : x+y = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

* Simetria

$$\Rightarrow [0,0]_{\mathbb{R}} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x+y \text{ es par} \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \text{ e } y \text{ tienen la misma paridad} \}$$

Por otro lado

$$[0,1]_{\mathbb{R}} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x+y \text{ es impar} \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \text{ e } y \text{ tienen distinta paridad} \}$$

Veamos que $A = \{ [0,0]_{\mathbb{R}}, [0,1]_{\mathbb{R}} \}$ es partición de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Se debe cumplir que

- 1) $\forall C \in A \quad C \neq \emptyset$
- 2) $\forall C_1, C_2 \in A \quad C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$
- 3) $\bigcup_{C \in A} C = A$

En efecto, 1) se tiene directo ya que

$$(0,0) \in [0,0]_{\mathbb{R}}$$

$$\text{y } (0,1) \in [0,1]_{\mathbb{R}}$$

$$\therefore [0,0]_{\mathbb{R}} \neq \emptyset \neq [0,1]_{\mathbb{R}}$$

y como son 2 elementos en A , y los estudie ambos se tiene que $\forall C \in A, C \neq \emptyset$

2) Notar que solo hay 2 elementos en A
por lo que solo debo estudiar la intersección de
ellos

$$\Rightarrow [0,0]_{\mathbb{R}} \cap [0,1]_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

ya se si esto no fuera así:

$$\Rightarrow \exists (a,b) \in [0,0]_{\mathbb{R}} \cap [0,1]_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow (a,b) \in [0,0]_{\mathbb{R}} \wedge (a,b) \in [0,1]_{\mathbb{R}}$$

Luego $\Downarrow$
a y b tienen la misma y diferente
paridad al mismo tiempo $\Rightarrow \Leftarrow$

$$\therefore [0,0]_{\mathbb{R}} \cap [0,1]_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

3) Es directo que $[0,0]_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\wedge [0,1]_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow [0,0]_{\mathbb{R}} \cup [0,1]_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

veamos ahora que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq [0,0]_{\mathbb{R}} \cup [0,1]_{\mathbb{R}}$

Sea $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pueden pasar 2 cosas

1) x e y misma paridad $\Rightarrow (x,y) \in [0,0]_{\mathbb{R}}$

2) x e y distinta paridad $\Rightarrow (x,y) \in [0,1]_{\mathbb{R}}$

En cualquier caso $(x, y) \in [0, 0]_{\mathbb{R}} \cup [0, 1]_{\mathbb{R}}$ B

$\therefore [0, 0]_{\mathbb{R}} \cup [0, 1]_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y A es partición
y $A = \{ [0, 0]_{\mathbb{R}}, [0, 1]_{\mathbb{R}} \} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \mathbb{R}$

P3 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ inyectiva

Se define en A la Relación Ω +9

$$x \Omega y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Para: es orden, sea $x, y, z \in A$

Reflexiva $x \Omega x \Leftrightarrow f(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \checkmark$ ✓

Antisimetría $x \Omega y \wedge y \Omega x$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

inyectiva
 $\Rightarrow$

$$x = y$$

Transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z)$$

$$\stackrel{\text{Trans de } \leq}{\Rightarrow} f(x) \leq f(z) \quad \checkmark$$

$\therefore \leq$ es de orden.

P4

$f: A \rightarrow B$, $g, h: B \rightarrow A$ tales que

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \wedge \quad f \circ h = \text{id}_B$$

a) Demuestre que f es biyectiva

En efecto, como $g \circ f = \text{id}_A$ y id_A es biyectiva

$\Rightarrow g \circ f$ es biyectiva

$\Rightarrow g$ epyectiva y f inyectiva

Además, como $f \circ h = \text{id}_B$ y id_B es biyectiva

$\Rightarrow f \circ h$ es biyectiva

$\Rightarrow f$ es epyectiva y h es inyectiva

$\therefore f$ es biyectiva

b) pda: $h = g = f^{-1}$

Demostremos que $h = f^{-1}$ y $g = f^{-1}$

En efecto, como

$$g \circ f = id_A \quad / \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1}$$

$$\Rightarrow g \circ id_B = f^{-1}$$

$$\Rightarrow g = f^{-1}$$

por otro lado

$$f \circ h = id_B \quad / f^{-1} \circ$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ id_B$$

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1}$$

$$\Rightarrow id_A \circ h = f^{-1}$$

$$\Rightarrow h = f^{-1}$$

$$\therefore f^{-1} = g = h$$

c) sea $E \neq \emptyset$ $\varphi: E \rightarrow E$ pda

$$[\forall X \subseteq E, \varphi(X) = X] \Leftrightarrow \varphi = id_E$$

$\Rightarrow$ Como $\varphi(X) = X$ se cumple $\forall X \subseteq E$ en particular se cumple para $X = \{\bar{x}\}$ con $\bar{x} \in E$

$$\Rightarrow \varphi(\{\bar{x}\}) = \{\bar{x}\} \text{ pero } \varphi(\{\bar{x}\}) = \{\varphi(\bar{x})\}$$

$$\Rightarrow \{\varphi(\bar{x})\} = \{\bar{x}\}$$

$$\Rightarrow \text{Como } \{\varphi(\bar{x})\} = \{\bar{x}\}$$

$$\Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \bar{x}$$

Como el $\bar{x}$ fue arbitrario

$$\Rightarrow \forall x \in E \quad \varphi(x) = x \quad \wedge \quad \varphi: E \rightarrow E$$

$$\therefore \varphi = \text{id}_E$$



Supongamos que $\varphi = \text{id}_E$.

Sea $X \subseteq E$ arbitrario.

$$\rightarrow \varphi(x) = \{y \in E \mid \exists x \in X, y = \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\}$$

$$= \{y \in E \mid \exists x \in X, y = x\}$$

$$= \{y \in E \mid y \in X\}$$

$$= \{y \in X\}$$

$$= X$$

