Resolución Aux Extra C3

P1 $f: P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) \to P(\mathcal{U})$ $\quad f(X,Y) = X \setminus Y$

a) Determine $f(\{(\mathcal{U},\emptyset), (\emptyset, A), (A,\emptyset)\})$, con $A \subseteq \mathcal{U}$

Nos piden determinar un cjto imagen

Por definición $\Rightarrow$ $f(\{(\mathcal{U},\emptyset),(\emptyset,A),(A,\emptyset)\}) = \{f(\mathcal{U},\emptyset), f(\emptyset,A), f(A,\emptyset)\}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} f(\mathcal{U},\emptyset) = \mathcal{U}\setminus\emptyset = \mathcal{U} \\ f(A,\emptyset) = A\setminus\emptyset = A \\ f(\emptyset,A) = \emptyset\setminus A = \emptyset \end{array}$$

$$\Rightarrow f(\{(\mathcal{U},\emptyset),(\emptyset,A),(A,\emptyset)\}) = \{\mathcal{U}, \emptyset, A\} \quad \blacksquare$$

b) pdq $f^{-1}(\{\mathcal{U},\emptyset\}) = \{(\mathcal{U},\emptyset)\} \cup \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) : X \subseteq Y\}$

En efecto, notemos que si:

$(X,Y) \in f^{-1}(\{\mathcal{U},\emptyset\}) \Leftrightarrow f(X,Y) \in \{\mathcal{U},\emptyset\}$

$\Rightarrow \underbrace{f(X,Y) = \mathcal{U}}_{\boxed{1}}$ o $\underbrace{f(X,Y) = \emptyset}_{\boxed{2}}$

$\boxed{1}$ que $f(X,Y) = \mathcal{U} \Leftrightarrow X \setminus Y = \mathcal{U}$

Si Y tiene al menos un elemento, entonces sería imposible obtener el universo.

Luego $Y = \emptyset \Rightarrow X \setminus Y = \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow X \setminus \emptyset = \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathcal{U}$

$\Rightarrow f(X,Y) = \mathcal{U}$ si $X = \mathcal{U}$, $Y = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(\mathcal{U}, \emptyset)\}$ ⊛

Ahora para $\boxed{2}$

que $f(X,Y) = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus Y = \emptyset$

que $X \setminus Y = \emptyset$ significa que $X \subseteq Y$ ya que

$X \setminus Y = \emptyset \Rightarrow X \cap Y^c = \emptyset \quad / \cup Y$

$\Rightarrow (X \cap Y^c) \cup Y = Y$

$\Rightarrow (X \cup Y) \cap (Y^c \cup Y) = Y$ /Distribi

$\Rightarrow (X \cup Y) \cap \mathcal{U} = Y$ / $A^c \cup A = \mathcal{U}$

$\Rightarrow (X \cup Y) = Y$

Luego sea $x \in X$ arbitrario, entonces

$x \in X \Rightarrow x \in X \cup Y$ (agrandando el cjto)

$\Leftrightarrow x \in Y$

Luego $X \subseteq Y$

$f(X,Y) = \emptyset$, necesariamente $X \subseteq Y$

$\therefore f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) : X \subseteq Y\}$

Luego Como $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f^{-1}(\{\mathcal{U}, \emptyset\}) = f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \cup f^{-1}(\{\emptyset\})$

$= \{(\mathcal{U}, \emptyset)\} \cup \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) : X \subseteq Y\}$ $\blacksquare$

c) Determine $f(D)$ con $D = \{(X,X),\ X \in P(\mathcal{U})\}$

Veamos que, $X \in P(\mathcal{U}) \Rightarrow f(X,X) = X \setminus X$
$= \emptyset \quad \forall X \in P(\mathcal{U})$

Luego $f(D) = \{\emptyset\}$

Obs: (X,X) lo pueden ver como que es un caso particular de $X \subseteq Y$, con $Y = X$, y usen la parte anterior

---

$\boxed{P2}$ $f: E \to F$, $g: F \to G$

a) probar que $\forall A, B \subseteq E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow f$ es inyectiva

Por doble implicancia

$\boxed{\Rightarrow}$ Debemos probar que f es inyectiva sabiendo que $\forall A, B \subseteq E\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

En efecto, sea $x_1, x_2 \in E$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$
(si logramos que $x_1 = x_2$ f será inyectiva)

entonces como $f(x_1) = f(x_2) = \bar{y}$ con $\bar{y} \in F$, es decir llamaremos a "$f(x_1)$" como "$\bar{y}$", al mismo tiempo llamaremos a "$f(x_2)$" como "$\bar{y}$" pues son iguales

$\Rightarrow$ el cjto. $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) \neq \emptyset$

ya que $\bar{y} \in f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$

Luego por hipotesis, como $\{x_1\}, \{x_2\} \subseteq E$

$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$

Ahora como $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset$

Luego como $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset \Rightarrow \{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$

Entonces $\exists z \in \{x_1\} \cap \{x_2\} \Rightarrow z \in \{x_1\} \wedge z \in \{x_2\}$

$\Rightarrow z = x_1 \wedge z = x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\blacksquare$

$\boxed{\Leftarrow}$ debemos probar que $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$
(Sabiendo que f es inyectiva)

Doble Inclusión!

Por apunte, sabemos que $f(A\cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

En efecto, sea $y \in f(A\cap B) \Rightarrow \exists x \in A\cap B,\ y = f(x)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B,\ y = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(A) \wedge f(x) = y \in f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

Falta ver que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A\cap B)$

Sea $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow \exists a \in A,\ f(a) = y$
$\wedge\ \exists b \in B,\ f(b) = y$

$\Rightarrow y = \boxed{f(a) = f(b)}$

Como f es inyectiva

$\Rightarrow a = b$

Luego $a \in A\cap B$ tq $f(a) = y$

$\Rightarrow y = f(a) \in f(A\cap B)$

$\Rightarrow y \in f(A\cap B)$

b) Sea $A \subseteq G$ pdq

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

En efecto, sea $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow \ g \circ f(x) \in A$

$\Leftrightarrow \ g(f(x)) \in A$

$\Leftrightarrow \ f(x) \in g^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$

c) Sea $B \subseteq F$ pdq

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap F(E)$$

por doble inclusión

$\boxed{\subseteq}$ Sea $y \in f(f^{-1}(B))$

$\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ tq $y = f(x)$

$\Rightarrow$ Como $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$

$\Rightarrow \boxed{y = f(x) \in B}$ y directamente

Como $x \in Dom(f) = E \Rightarrow f(x) \in f(E) \Rightarrow \boxed{y \in f(E)}$

$\Rightarrow \ y \in f(E) \cap B$

$\boxed{2}$ Sea $y \in f(E) \cap B$

$\Rightarrow y \in f(E) \wedge y \in B$

$\Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$, además $y \in B$

$\Rightarrow y = f(x) \in B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ con $f(x) = y$

$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$ ya que $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(f(B))$

$\boxed{P_3}$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ se define R tq

$$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\left(\text{obs: } \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$$

pdq: R es de equivalencia

DEBERIA DECIR
DE EQUIVALENCIA

que R sea ~~refleja~~ signifa que R debe ser refleja, simetrica y transitiva a la vez

- refleja: pdq $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \quad (x,y) R (x,y)$

En efecto, sea $(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$

Notemos que $xy = yx$ Por conmutatividad de $\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (x,y) R (x,y)$

Lo cual es verdadero

- Symetrica: pdq $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \quad (a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$cb = da$

Sea $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ tq $(a,b) R (c,d)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (a,b) R (c,d) &\Leftrightarrow ad = bc \\
&\Leftrightarrow bc = ad \\
&\Leftrightarrow cb = da \\
&\Leftrightarrow (c,d) R (a,b) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

• Transitiva: Pdq $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$

$(a,b) R (c,d) \wedge (c,d) R (e,f)$

$\Rightarrow (a,b) R (e,f)$

Sea $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ tq

$(a,b) R (c,d) \wedge (c,d) R (e,f)$

$\Leftrightarrow \quad ad = bc \quad \wedge \quad cf = de$

$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

Puedo ya que $b,d,f \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es decir $b,d,f \neq 0$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \quad \Rightarrow \quad af = be$

$\Leftrightarrow (a,b) R (e,f)$ ⓐ

Calcule $[(0,5)]_R$

Notemos que $[(0,5)]_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} : (a,b) R (0,5)\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : a \cdot 5 = b \cdot 0\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : 5a = 0\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : a = 0\}$

$= \{(0,b) \mid b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

P4 en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se define $\mathcal{M}$ como

$$x \mathcal{M} y \iff xy > 0$$

pdq: $\mathcal{M}$ es de equivalencia y encontrar $(\mathbb{R}\setminus\{0\})/\mathcal{M}$

refleja: Sea $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0$

$\Rightarrow x \cdot x > 0$

$\iff x R x$ ▨

Simetrica: Sea $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tq $x R y$

$x R y \iff xy > 0$

$\iff yx > 0$ Conmutatividad

$\iff y R x$

transitividad: Sea $x, y, z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tq $x R y \wedge y R z$

$x R y \wedge y R z \Rightarrow xy > 0$

$\wedge\ yz > 0$ por Calculo primer control $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \Rightarrow xy > 0$

$\Rightarrow xy \cdot yz > 0$

$\Rightarrow x y^2 z > 0$

$\Rightarrow xz \cdot y^2 > 0$ $\quad y^2 > 0$

$\Rightarrow xz > 0 \iff x R z$

Encontremos $\mathbb{R}\setminus\{0\}/_M$

Notemos que $[1]_M = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : x R 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : x \cdot 1 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : x > 0\}$

$= \mathbb{R}_+$

Por otro lado $[-1] = \{y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : y R -1\}$

$= \{y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : y(-1) > 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : y < 0\}$

$= \mathbb{R}_-$

$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}/_M = \{[1]_M, [-1]_M\}$

$= \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-\}$

$\boxed{P5}$ $\mathcal{F} = \{f : A \to B : f \text{ es función}\}$ R es orden en B

Se define Ψ en $\mathcal{F}$ como

$$f \Psi g \Leftrightarrow \forall x \in A \quad f(x) R g(x)$$

a) pdq Ψ es orden

- Refleja: Sea $f \in \mathcal{F}$, notemos que $\forall x \in A$ $f(x) \in B$

Como R es refleja, para $\forall y \in B$, $y R y$

Luego, como $f(x) \in B \Rightarrow f(x) R f(x) \quad \forall x \in A$

$$\Leftrightarrow \quad f \Psi f$$

- Antisimetrica: Sea $f, g \in \mathcal{F}$ tq $f \Psi g \wedge g \Psi f$

$$\Rightarrow f \Psi g \wedge g \Psi f \Leftrightarrow \forall x \in A \quad f(x) R g(x)$$
$$\wedge \quad \forall x \in A \quad g(x) R f(x)$$

como R es antisimetrica

$$\Rightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

y como $f : A \to B$ y $g : A \to B$

$$\Rightarrow \text{dom}(f) = \text{dom}(g)$$
$$\wedge$$
$$\text{Cod}(f) = \text{Cod}(g)$$

$$\Rightarrow \quad f = g$$

• Transitiva: Sea $f,g,h \in \tilde{F}$ tq $f \preceq g \wedge g \preceq h$

$\Rightarrow f \preceq g \wedge g \preceq h \Leftrightarrow \forall x \in A \; f(x) R g(x)$
$\wedge \; \forall x \in A \; g(x) R h(x)$

Como R es transitiva $\Rightarrow \forall x \in A \; f(x) R h(x)$

$\Leftrightarrow f \preceq h$

b) pdq: si A y B tienen al menos dos elementos $\Rightarrow$ es orden parcial

Debemos demostrar que $\exists f,g \in \tilde{F}$ que no son comparables

⊛ Por contradicción, supongamos que $\forall f,g \in F$, f y g son comparables.

Además, por la hipótesis A y B tienen al menos dos elementos, es más, por la indicación

$A = \{a,b\}$ $B = \{c,d\}$

Defino $f: A \to B$ tq $f(a) = c$ y $f(b) = d$

y $g: A \to B$ tq $g(a) = d$ y $g(b) = c$

Luego $f,g \in F$ y por hipótesis de contradicción

f y g son comparables

f y g comparables $\Leftrightarrow$ $f \Psi g \vee g \Psi f$

Sin perdida de generalidad supongamos que se cumple que

$$f \Psi g \Rightarrow \forall x \in A \quad f(x) R g(x)$$

$$\Rightarrow f(a) R g(a) \wedge f(b) R g(b)$$

$$\Leftrightarrow c R d \wedge d R c$$

Por R antisimetrica $\Rightarrow$ $c = d$

$\Rightarrow \Leftarrow$ pues B tendria 1 solo elemento