MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Extra C3

03 de Mayo de 2017

P1. Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $f(X,Y) = X \setminus Y$.

a) Determine $f(\{(\mathcal{U},\emptyset),(\emptyset,A),(A,\emptyset)\})$. con $A \subseteq \mathcal{U}$

b) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U},\emptyset\}) = \{(\mathcal{U},\emptyset)\} \cup \{(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid X \subseteq Y\}$.

c) Determine $f(D)$ donde $D = \{(X,X) : X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})\}$

P2. Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Probar que:

$$(\forall A, B \subseteq E)\ [f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \iff f \text{ es inyectiva}$$

b) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

c) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P3. Se define en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ la relación $\mathcal{R}$ dada por, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia y calcule $[(0,5)]_{\mathcal{R}}$.

P4. Se define la relación $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por, $x\mathcal{M}y \Leftrightarrow xy > 0$. Demuestre que $\mathcal{M}$ es de equivalencia y encuentre $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{M}$.

P5. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to B \mid f \text{ es función }\}$. Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ψ por:

$$f\Psi g \iff \forall a \in A, f(a)\mathcal{R}g(a)$$

a) Demuestre que Ψ es orden en $\mathcal{F}$.

b) Demuestre que si A y B tienen al menos dos elementos, entonces Ψ es de orden parcial. *Indicación: Suponga que $A = \{a,b\}$ y $B = \{c,d\}$, construya dos buenas funciones y proceda por contradicción.*

Resumen:

- Sea $f : A \to B$ y $A' \subseteq A$ se define el conjunto imagen de A' por f como

$$\begin{aligned} f(A') &= \{y \in B : \exists x \in A', f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \in B : x \in A'\} \\ &= \bigcup_{x \in A'} \{f(x)\} \end{aligned}$$

- $f : A \to B$ es biyectiva $\Longleftrightarrow f(A) = B$

- Sea $f : A \to B$ y $A_1, A_2 \subseteq A$ se tiene que:
  1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
  3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

- Sea $f : A \to B$ y $B' \subseteq B$ se define el conjunto imagen de B' por f como

$$\begin{aligned} f^{-1}(B') &= \{x \in A : f(x) \in B'\} \\ &= \bigcup_{y \in B'} f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

- **OBSERVACIÓN**: es muy importante notar la siguiente equivalencia.

$$\boldsymbol{x \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow f(x) \in B'}$$

  Además se tiene que:

$$\boldsymbol{x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A)}$$

- Sea $f : A \to B$ y $B_1, B_2, B' \subseteq B$ se tiene que:
  1. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
  2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
  3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
  4. $A' \subseteq A \Longrightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
  5. $B' \subseteq B \Longrightarrow f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$

- (En el curso) Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación sobre A si se cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$

- **Propiedades**. una relación $\mathcal{R}$ en A es:
  1. **refleja** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
  2. **simétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
  3. **antisimétrica** si $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
  4. **transitiva** si $\forall x, y, z \in A,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

  Obs: una relación puede ser simétrica y antisimétrica a la vez, no son definiciones excluyentes.

- $\mathcal{R}$ es de equivalencia si es refleja, simetrica y transitiva.

- $\mathcal{R}$ es de orden (o simplemente le llamamos orden) si es refleja, antisimetrica y transitiva.
  Se dice que x e y son comparables si se cumple que $x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$.
  Se dice que $\mathcal{R}$ es orden total si $\forall x, y \in A$, x e y son comparables.

- Sea $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a asociada a $\mathcal{R}$ como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\} \subseteq A$$

  Obs: si $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ entonces $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$

- Al conjunto de todas las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama **conjunto cuociente**, y se denota $A/\mathcal{R}$ y es tal que:

$$A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre A. Para todo $x, y \in A$ se tiene que:

$$[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}} \Longleftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$$

- $A/\mathcal{R}$ es una partición de A

- $a \equiv_n b \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z},\ a - b = qn$

- $\equiv_n$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
  El conjunto cuociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ lo escribiremos como $\mathbb{Z}_n$ y equivale a

$$\mathbb{Z}_n = \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

- Teorema: si $n \geq 1$, entonces $\mathbb{Z}_n$ tiene n elementos, y son tal que:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n &= \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\} \\ &= \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n\} \end{aligned}$$