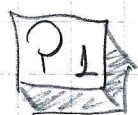


Resolución Aux 5



$$G_B = \{ f: A \rightarrow A \mid f \text{ biyección y } f(i) = i \quad \forall i \in B \}$$

$$A = \{1, \dots, n\} \quad B \subset A$$

a) pda $G_B \neq \emptyset$ y que si $f \in G_B \Rightarrow f^{-1} \in G_B$

[1] $G_B \neq \emptyset$, ya que si tomo $f \equiv \text{id}_A$ $\rightarrow$ idénticamente

Esta es una función biyectiva que va de A en A y además $f(x) = \text{id}_A(x) = x \quad \forall x \in A$

$$\Rightarrow f(i) = i$$

[2] si $f \in G_B \Rightarrow f$ es biyectiva y $f(i) = i \quad \forall i \in B$

Como f es biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: A \rightarrow A$ biyectiva

$$\Rightarrow \text{si } f(i) = i \Rightarrow f^{-1}(i) = i \quad \text{por def de } f^{-1}$$

Luego $f^{-1}: A \rightarrow A$, es biyectiva y $f^{-1}(i) = i \quad \therefore f^{-1} \in G_B$

b) pda si $f, g \in G_B \Rightarrow f \circ g \in G_B$

Como f y g pertenecen a $G_B \Rightarrow f, g$ son biyectivas y $f(i) = g(i) = i \quad \forall i \in B$.

Como f y g son biyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es biyectiva (Propiedad del Apunte)

Por otro lado, sea $i \in B$ arbitrario

$$\begin{aligned} \Rightarrow g \circ f(i) &= g(f(i)) \\ &= g(i) \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Def } g \circ f \\ f(i) &= i \\ g(i) &= i \end{aligned}$$

Luego $g \circ f(i) = i$ y $g \circ f$ es biyectiva

$$\therefore g \circ f \in G_B$$

P2

$A, B \neq \emptyset$ $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, $h: B \rightarrow B$

- 1) h biyectiva
- 2) $f \circ g = h$
- 3) $g \circ f = id_A$

Mostrar que f y g son biyectivas y $h = id_B$

En efecto, como h es biyectiva y $f \circ g = h$

$\Rightarrow f \circ g$ es biyectiva

$\stackrel{\text{un}}{=} \downarrow$ biyectiva

$\Rightarrow f$ es epyectiva y g inyectiva

Por otro lado, como $g \circ f = id_A$ y id_A es biyectiva

$\Rightarrow g \circ f$ es biyectiva

$\Rightarrow g$ es epyectiva y f inyectiva

Luego f y g son ambas biyectivas.

Ahora mostremos que $h = id_B$

Forma 1: MATRACA

$$\text{de 2) } f \circ g = h \quad / \quad g \circ$$

$$\Rightarrow g \circ (f \circ g) = g \circ h$$

$$\Rightarrow (g \circ f) \circ g = g \circ h$$

$$\Rightarrow id_A \circ g = g \circ h$$

$$\Rightarrow g' = g \circ h$$

$$\Rightarrow g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ (g \circ h)$$

$$\Rightarrow id_B = (g^{-1} \circ g) \circ h$$

$$\Rightarrow id_B = id_B \circ h$$

$$\Rightarrow id_B = h$$

Asocio

$$g \circ f = id_A$$

$$id_A \circ g = g$$

$$/ \quad g^{-1} \circ$$

Asocio, $g^{-1} \circ g = id_B$

Forma 2: Cálculo de inversa

Como f y g son dos funciones, $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$

y se cumple:
en particular
que

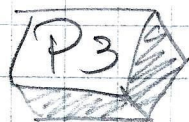
$$1) \quad g \circ f = id_A$$

2) f es biyectiva

Luego por prop. del apunte se concluye
que g es biyectiva y que $f^{-1} = g$
ya sabiamos *Esto nos interesa!*

Luego, por 2)

$$\begin{aligned} h &= f \circ g \\ &= f \circ f^{-1} \\ &= \text{id}_B \end{aligned}$$



$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ biyectiva}\}$

$$\psi: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad \psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Demuestre que ψ esta bien definida

En efecto, hay que probar que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$

$$\psi(f, g) \in \mathcal{F} \quad (\text{es decir que el codominio tiene sentido})$$

Notemos que, sea $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ arbitrario

$$\Rightarrow \psi(f, g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

biyectiva ¿Por que?

Como f es biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ es biyectiva
Como g es biyectiva $\Rightarrow g^{-1}$ es biyectiva

$\Rightarrow$ Como f^{-1} y g^{-1} son biyectivas

Se concluye que $g^{-1} \circ f^{-1}$ es biyectiva

$\Rightarrow \Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ es biyectiva

Luego $\Psi(f, g) \in F$, como (f, g) fue arbitrario, se concluye que Ψ está bien definido.

b) Inyectividad:

No es inyectiva ya que, sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva
y $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (claramente es biyectiva) $\rightarrow$ cualquiera

$$\Rightarrow \Psi(\text{id}_{\mathbb{R}}, f) = (\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f)^{-1} = (f)^{-1} = f^{-1}$$

$$\Psi(f, \text{id}_{\mathbb{R}}) = (f \circ \text{id}_{\mathbb{R}})^{-1} = (f)^{-1} = f^{-1}$$

pero $(\text{id}_{\mathbb{R}}, f) \neq (f, \text{id}_{\mathbb{R}})$

Epiyectividad:

→ Codominio

Es epiyectiva, en efecto, sea $\bar{f} \in F$ me basta tomar el par $(\text{id}_R, \bar{f}^{-1}) \in F \times F$ para que

$$\begin{aligned}\psi(\text{id}_R, \bar{f}^{-1}) &= (\text{id}_R \circ \bar{f}^{-1})^{-1} = (\bar{f}^{-1})^{-1} \\ &= \bar{f} \quad \square\end{aligned}$$

$$c) \text{ pda } \psi(\psi(f, g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = \text{id}_R \quad \forall (f, g) \in F \times F$$

sea $(f, g) \in F \times F$ arbitrario

$$\Rightarrow \psi(\psi(f, g), \psi(g^{-1}, f^{-1}))$$

$$= \psi(\underbrace{(f \circ g)^{-1}}_A, \underbrace{(g^{-1} \circ f^{-1})^{-1}}_B) = (A \circ B)^{-1}$$

$$= \left\{ [(f \circ g)^{-1}] \circ [(g^{-1} \circ f^{-1})^{-1}] \right\}^{-1}$$

$$= ((g^{-1} \circ f^{-1})^{-1})^{-1} \circ ((f \circ g)^{-1})^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g)$$

$$\begin{aligned}
 &= g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g \quad \swarrow \text{Asocio} \\
 &= g^{-1} \circ \text{id}_R \circ g \\
 &= g^{-1} \circ g \\
 &= \text{id}_R \quad \square
 \end{aligned}$$

d) Deben llegar a que

$$\psi(A) = \left\{ \underbrace{\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}}_{\psi(f_1, g_1)}, \sqrt[3]{\frac{8(x-4)}{5}} \right\}$$

$$\psi(f_2, g_2)$$



$$A \cap B = \emptyset \quad f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$

a) pda $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

En efecto, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$

$$= f^{-1}(\emptyset)$$

$$= \emptyset$$

b) Si f es inyectiva $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

Por contradicción, Supongamos que f es inyectiva
y que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

$\rightarrow$ Como $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, $\exists y \in f(A) \cap f(B)$

Como $y \in f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$

~~$\exists$~~ $\Rightarrow \exists a \in A, f(a) = y \wedge \exists b \in B, f(b) = y$

Luego $y = f(a) \wedge y = f(b)$

$\Rightarrow f(a) = f(b)$

Como f es inyectiva $\Rightarrow a = b$

desde Ahora solo dire "a"

~~$\exists$~~ Como $a \in A$, $b = a \in B$

$\Rightarrow a \in A \cap B$ $\ddot{o}!$

PERO, $A \cap B = \emptyset$ y como

puedo tomar $a \in A \cap B$ se tiene una
Contradicción

c) si f es epyectiva $\Rightarrow f(A) \cup f(A^c) = U$

$$\begin{aligned}\text{En efecto, } f(A) \cup f(A^c) &= f(A \cup A^c) \\ &= f(U)\end{aligned}$$

Como f es epyectiva $f(U) = U$ ↗ Codominio

$$\therefore f(A) \cup f(A^c) = U$$



$$f: E \rightarrow F$$

a) probar que $\forall A \subseteq F \quad f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

En efecto,

$$\text{Sea } x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c$$

$$\Leftrightarrow f(x) \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$$

$$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c$$

b) pda $\forall A, B \subseteq F \quad f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$

Recordemos que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

y que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c$$

$\Rightarrow$ Sea $A, B \subseteq F$ arbitrarios

$$f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}((A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c)$$

$$= f^{-1}((A^c \cap B^c)^c) \cap f^{-1}((A \cap B)^c)$$

$$= [f^{-1}(A^c \cap B^c)]^c \cap [f^{-1}(A \cap B)]^c$$

$$= [f^{-1}(A^c) \cap f^{-1}(B^c)]^c \cap [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)]^c$$

$$= [f^{-1}(A^c)^c \cup f^{-1}(B^c)^c] \setminus (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$$

$$= [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)] \setminus (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$$

$$= [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)] \setminus [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)]$$

$$= f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$$

c) $A, B \subseteq E$, si $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A)$

$$\rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$= [f(A) \cup f(B)] \cap \overbrace{(f(A)^c \cup f(A))}^E$$

$$= f(A) \cup [f(B) \cap f(A)^c]$$

$$= f(A) \cup [f(B) \setminus f(A)]$$

$$= f(A) \cup \emptyset$$

$$= f(A)$$

d) si f es t_g $\forall A, B \subseteq E$ $[A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B)]$

pdg: f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

En efecto, sea $x_1, x_2 \in E$ t_g $x_1 \neq x_2$

Probaré que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sea $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_1, x_2\}$

$\Rightarrow f(A) = \{f(x_1)\}$ y $f(B) = \{f(x_1), f(x_2)\}$

Donde $A \neq B$, entonces por hipótesis

$$f(A) \neq f(B)$$

De aquí, Supongamos que $f(x_1) = f(x_2) = y$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(B) &= f(\{x_1, x_2\}) = \{f(x_1), f(x_2)\} \\ &= \{y, y\} \\ &= \{y\}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}f(A) &= f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} \\ &= \{y\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(A) = f(B) \quad \text{pero} \quad f(A) \neq f(B) \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

$$\text{Luego } f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{Es decir } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\therefore f$ es inyectiva

P6

$$mRn \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 3K \quad K \in \mathbb{Z}$$

↓
múltiplo de 3

1) Refleja: por $mRm \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Sea $m \in \mathbb{Z}$

tg

$$mRm \Leftrightarrow m^2 - m^2 = 0 = 3 \cdot 0 \quad \therefore R \text{ es refleja}$$

2) Antisimétrica: por $\forall m, n \in \mathbb{Z} \quad mRn \Rightarrow nRm$

Sea $m, n \in \mathbb{Z}$ arbitrarios tal que

$$mRn \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, \quad m^2 - n^2 = 3K \quad / \cdot -1$$

$$\Rightarrow n^2 - m^2 = -3K$$

$$\Rightarrow n^2 - m^2 = 3(-K) = 3K', \quad K' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow nRm$$

3) transitiva: por $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}$ arbitrarios tal que $\exists p, q \in \mathbb{Z}$

$$x^2 - y^2 = 3p$$

$$+ y^2 - z^2 = 3q$$

$$x^2 - z^2 = 3p + 3q = 3(p+q), \quad p+q \in \mathbb{Z}$$

Luego $x^2 - z^2 = 3K$

$(\Rightarrow) xRz$

~~1/2~~

$K = p + q \in \mathcal{Z}$