Apunte de Ejercicios
ALGEBRA

Pablo Dartnell, Alejandro Maass, Carolina Silva

Departamento de IngenierÃa MatemÂ·tica
Facultad de Ciencias Fisicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Índice general

PREFACIO

Este apunte contiene ejercicios resueltos para el curso de Algebra (MA11A) dictado en la Facultad de Ciencias Fisicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. Ellos fueron tomados de los controles y guias de estudio entregadas a los estudiantes desde 1989. Las respuestas muchos de los problemas resueltos del apunte hacen referencia al apunte del curso de Algebra de los autores P. Dartnell y A. Maass. Por este motivo recomendamos la lectura de dicho apunte de materia simultaneamente a lalectura de estos problemas.

Capítulo 1

Elementos básicos de lógica

1.1. Problemas resueltos.

P1) Demostrar que las siguientes proposiciones son tautologias:

1. $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \overline{p}$

2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

Solución:

1. Resolvámoslo usando tautalogias vistas en clases,

$$
\begin{aligned}
[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \overline{p} \quad &\Leftrightarrow \overline{[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r]} \vee \overline{p} && \text{(taut.8)} \\
&\Leftrightarrow [\overline{p \Rightarrow \overline{q})} \vee \overline{(\overline{r} \vee q)} \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.3)} \\
&\Leftrightarrow [\overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee (r \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.3 y 8)} \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee [(r \vee \overline{r}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})]] \vee \overline{p} && \text{(taut.7 y 3)} \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee [V \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})]] \vee \overline{p} && \text{(taut.1)} \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\overline{q} \vee \overline{r})] \vee \overline{p} && \text{(taut.2)} \\
&\Leftrightarrow [[(p \wedge q) \vee \overline{q}] \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.6)} \\
&\Leftrightarrow [[(p \vee \overline{q}) \wedge (q \vee \overline{q})] \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.7)} \\
&\Leftrightarrow [[(p \vee \overline{q}) \wedge V] \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.1)} \\
&\Leftrightarrow [(p \vee \overline{q}) \vee \overline{r}] \vee \overline{p} && \text{(taut.2)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \overline{p}) \vee (\overline{q} \vee \overline{r}) && \text{(taut.6)} \\
&\Leftrightarrow V \vee (\overline{q} \vee \overline{r}) && \text{(taut.1)} \\
&\Leftrightarrow V && \text{(taut.2)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que :

$$[[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \overline{p}] \Leftrightarrow V$$

es decir, la proposición dada es una tautologia.

2. Resolvámoslo usando tabla de verdad (usted como ejercicio resuélvalo usando tautologias vistas en clases).
Hay que construir las tablas de verdad de las proposiciones $A = (p \wedge q)$ y $B = (p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ y luego ver si son iguales.

p	q	$A = p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$B = (p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

La columna correspondiente a A (tercera) y la correspondiente a B (sexta) son iguales, es decir $A \Leftrightarrow B$ es una proposición verdadera, que es lo que queriamos demostrar.

$\square$

P2) 1. Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \overline{q})$ es verdadera y $(q \Rightarrow r)$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p.

2. Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r, s sabiendo que

$$(s \Rightarrow (\overline{r} \vee r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r})$$

es verdadera.

Solución:

1. Sabemos que $(q \Rightarrow r)$ es verdadera, por lo tanto hay tres situaciones posibles:

1)q es V y r es V,
2)q es F y r es F,
3)q es F y r es V;

pero también sabemos que r es falsa, por lo que sólo es posible el segundo caso, es decir q es falsa y r es falsa. Además tenemos que $(p \Leftrightarrow \overline{q})$ es verdadero, por lo tanto:

p y $\overline{q}$ son verdaderas, es decir, p es verdadera y q es falsa
o
p y $\overline{q}$ son falsas, es decir, p es falsa y q es verdadera;

pero sabemos, por lo que hicimos al inicio, que q es falsa, entonces estamos en el primer caso, es decir, p es verdadera.

2. Desarrollemos la proposición dada:

$$[(s \Rightarrow (\overline{r} \vee r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r})] \quad \Leftrightarrow \quad [(s \Rightarrow V) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r})].$$

Pero

$$V \Rightarrow V \qquad es \;\; verdadero$$

y

$$F \Rightarrow V \qquad es \;\; verdadero;$$

por lo tanto cualquiera sea el valor de s, $(s \Rightarrow V)$ es verdadero, entonces la proposición queda:

$$[(s \Rightarrow (\overline{r} \vee r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r})] \quad \Leftrightarrow \quad [V \Rightarrow [\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r}]]$$

y recordar que por hipótesis es verdadera. Pero $(V \Rightarrow F)$ es falso, entonces para que lo anterior sea verdadero, debemos tener que $[\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r}]$ es verdadera, lo que es equivalente a:

1)s es verdadera,
2)$\overline{r}$ es verdadera, es decir, r es falsa y
3)$\overline{(p \Rightarrow q)}$ es verdadera.

Desarrollemos la última proposición :

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\overline{p} \vee q)} \quad \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$$

Entonces por hipótesis tenemos que :

$$[(p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow V] \quad \Leftrightarrow \quad (p \ es \ V \ \wedge \ q \ es \ F)$$

Luego tenemos que s y p son verdaderas y r y q, falsas.

□

P3) Se detuvo a tres sospechosos de un crimen, a los que llamaremos S_1, S_2 y S_3. Al declarar dijeron lo siguiente :
S_1: "S_2 es culpable y S_3 es inocente"
S_2: "si S_1 es culpable, entonces S_3 también lo es"
S_3: ꝺo soy inocente, pero alguno de los otros dos es culpable"
Sabiendo que los culpables mintieron y los inocentes dijeron la verdad, determine quién es culpable y quién no.

Solución: Definamos las siguientes proposiciones:
$p \Leftrightarrow S_1$ es inocente
$q \Leftrightarrow S_2$ es inocente
$r \Leftrightarrow S_3$ es inocente

Ahora escribamos lo que declaró cada uno en términos de p, q y r:

S_1 declaró $\overline{q} \wedge r$
S_2 declaró $\overline{p} \Rightarrow \overline{r}$
S_3 declaró $r \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$

Construyamos la tabla de verdad de las declaraciones:

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{r}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$S_1 : \overline{q} \wedge r$	$S_2 : \overline{p} \Rightarrow \overline{r}$	$S_3 : r \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V	F

Supongamos (sólo por un instante, para entender) que S_1 es culpable, luego p es falsa. Además, como S_1 es culpable sabemos, por hipótesis, que esta mintiendo, es decir, que $(\bar{q} \wedge r)$ es falsa. Concluimos que el valor de verdad de la inocencia de S_1 debe coincidir con el valor de verdad de lo que declaró. Asi, lo que debemos buscar en la tabla de verdad es que coincidan:

el valor de verdad de p con el valor de verdad de lo que dijo S_1,
el valor de verdad de q con el valor de verdad de lo que dijo S_2 y
el valor de verdad de r con el valor de verdad de lo que dijo S_3
lo que sólo se da en la sexta fila, por lo tanto S_1 y S_3 son culpables y S_2 es inocente.

$\square$

P4) Sean p y q proposiciones. Se define la proposición que se lee "ni q ni pz que denotamos mediante el conectivo $p \downarrow q$, usando la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1. Probar que $\overline{p} \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{(p \downarrow q)}$.
2. Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo el conectivo $\downarrow$ y el simbolo de negación.

Solución:

1. Demostraremos ambas equivalencias usando una tabla de verdad:

p	q	$\overline{p}$	$(p \downarrow p)$	$\overline{p} \Leftrightarrow (p \downarrow p)$	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$\overline{p \downarrow q}$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{p \downarrow q}$
V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V

La quinta columna muetra que $\overline{p} \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ es verdadera y la novena, que $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{p \downarrow q}$ es verdadera.

2. Veamos cómo escribir $p \Rightarrow q$:

$$(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \quad \Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \downarrow q)} \quad (parte\ (a))$$

Veamos cómo escribir $q \wedge p$:

$$(q \wedge p) \quad \Leftrightarrow \overline{(\overline{q} \vee \overline{p})} \quad \Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \downarrow \overline{q})} \quad (parte(a))$$

□

P5) 1. Si q y r son proposiciones, determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\overline{(q \vee r)} \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)]$$

2. Si la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa. Cuál es el valor de verdad de la proposición:

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge q)$$

3. Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

$$(\forall\ x \in A)(\forall\ y \in A) \ \ x + y \leq 1$$

$$(\forall\ x \in A)(\exists\ y \in A) \ \ x^2 \leq y$$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

Solución:

1.

$$\begin{aligned}
[\overline{(q \vee r)} \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)] \quad &\Leftrightarrow [(\bar{q} \wedge \bar{r}) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)] && (3)\\
&\Leftrightarrow [(\bar{q} \wedge q) \wedge (\bar{r} \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)] && (6)\\
&\Leftrightarrow [F \wedge F] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)] && (1)\\
&\Leftrightarrow F \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)] && (2)
\end{aligned}$$

Pero sabemos que $F \Rightarrow V$ y $F \Rightarrow F$ son verdaderas, por lo tanto la proposición es verdadera.

2. Tenemos que $p \Rightarrow q$ $(\bar{p} \vee q)$ es falsa. Desarrollemos la proposición:

$$
\begin{aligned}
(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge q) \quad & \Leftrightarrow [(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee r) \wedge q)] \wedge [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow [\overline{(p \vee (q \wedge r))} \vee ((p \vee r) \wedge q)] \wedge [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow [(\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})) \vee ((p \vee r) \wedge q)] \wedge [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow [(\bar{p} \vee (p \vee r)) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge ((\bar{q} \vee \bar{r}) \vee (p \vee r)) \wedge ((\bar{q} \vee \bar{r}) \vee q)] \wedge \\
& \quad\ [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow [V \wedge F \wedge V \wedge V] \wedge [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow F \wedge [((p \vee r) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))] \\
& \Leftrightarrow F
\end{aligned}
$$

Es decir, la proposición es falsa.

3. Tenemos el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Analicemos las proposiciones:

$\cdot(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x + y \leq 1$.
Esta proposición es falsa, pues si tomams $x = y = 1$ tenemos que $x + y = 2 \not\leq 1$.

$\cdot(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x^2 \leq y$. Tenemos que verificar que si dado un $x \in A$, encontramos un $y \in A$ tal que $x^2 \leq y$.

para $x = -1 \rightarrow$ sirve $y = 1$

para $x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ sirven $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$

para $x = 0 \rightarrow$ sirven $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$

para $x = \frac{1}{2} \rightarrow$ sirven $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$

para $x = 1 \rightarrow$ sirve $y = 1$

Por lo tanto la proposición es verdadera.

Neguemos las proposiciones:

$$
\begin{aligned}
\overline{(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x + y \leq 1} \quad & \Leftrightarrow (\exists x \in A)\overline{(\forall y \in A)\ x + y \leq 1} \\
& \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)\ \overline{x + y \leq 1} \\
& \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)\ x + y > 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ x^2 \leq y} &\Leftrightarrow (\exists x \in A)\overline{(\exists y \in A)\ x^2 \leq y} \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in A)\ \overline{x^2 \leq y} \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in A)\ x^2 > y
\end{aligned}$$

$\square$

P6) 1. Negar las siguientes proposiciones:

a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \ x < y$

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \ x > 1 \wedge y \leq 1$

c) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ \ |a_n| < \epsilon$

2. Indique el valor de verdad de la siguiente proposición cuantificada:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N}) \quad n(x^2 - mx) \leq 0$$

Solución:

1.

a)

$$\begin{aligned}
\overline{(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x < y)} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\overline{(\forall y \in \mathbb{R})\ x < y)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ \overline{(x < y)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \geq y
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\overline{(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x > 1 \wedge y \leq 1} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\overline{(\forall y \in \mathbb{R})\ x > 1 \wedge y \leq 1} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\overline{x > 1 \wedge\ \ y \leq 1} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ \overline{x > 1} \vee \overline{y \leq 1} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \leq 1 \vee y > 1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\overline{(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ |a_n| < \epsilon} \quad &\Leftrightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)\overline{(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_o)\ |a_n| < \epsilon} \\
&\Leftrightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n_0 \in \mathbb{N})\overline{(\forall n > n_o)\ |a_n| < \epsilon} \\
&\Leftrightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)\ \overline{|a_n| < \epsilon} \\
&\Leftrightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)\ |a_n| \geq \epsilon
\end{aligned}$$

2. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$, hay que estudiar si existe un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(x^2 - mx) \leq 0$. Notar que dicho $n \in \mathbb{N}$ debe ser el mismo para cualquier par (x, m) con $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Pero esto es directo tomando $n = 0$, pues:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N})\ 0(x^2 - mx) = 0$$

$\square$

1.2. Problemas propuestos.

P1) Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologias:

1. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$
2. $[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
3. $[(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

P2) 1. Sean p, q y r proposiciones tales que $((\overline{p} \vee q) \Rightarrow r)$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

b) $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow \overline{(q \vee r)})$

2. Sean p, q y r proposiciones. Probar sin usar tabla de verdad que la siguiente proposición es una tautologia:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))$$

P3) Sean las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que $[(p_1 \underline{\vee} p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

1. $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$
2. $[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \overline{p_1}] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$
3. $\overline{[(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)]} \Leftrightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)$

(Recordar que $p \underline{\vee} q \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$)

P4) 1. *a*) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.

b) Compare la proposición obtenida en el punto anterior con la proposición $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$,donde $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \;\wedge\; \overline{(p \wedge q)}$.

2. Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:
$(x \in A \;\wedge\; y \in B) \Rightarrow y \in A$,
$(x \notin A \;\vee\; y \in A) \Rightarrow y \notin B$.

Probar que $y \notin B$ es verdadera.

P5) Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \;\Leftrightarrow\; \exists r,\; r \textit{ es proposición y } (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q).$$

Pruebe que $(p \vdash q) \;\Leftrightarrow\; (p \Rightarrow q)$.

P6) 1. Negar la proposición siguiente:

$$(\forall\, x \in \mathbb{Q})(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, y \in \mathbb{Q}^c)\ \epsilon/3 < |x - y| < \epsilon/2.$$

2. Indique el valor de verdad de la proposición cuantificada siguiente:

$(\forall\, x \in A)(\exists\, \delta > 0)\;\; x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$.

P7) Sea S un subconjunto de los números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

1. Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.

2. Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.
3. Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x = \frac{1}{n}\}$. Probar que el origen no es un punto aislado.

Capítulo 2

Elementos de teoria de conjuntos

2.1. Problemas resueltos.

P1) Sean A, B, C conjuntos. Probar que:

1. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
2. $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \;\Leftrightarrow\; A = \emptyset$
3. $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$

Solución:

1. Sea $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, luego

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \;\wedge\; x \in (A \setminus C) && (def.\cap)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \;\wedge\; x \notin B) \;\wedge\; (x \in A \;\wedge\; x \notin C) && (def.\setminus)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \;\wedge\; x \in A) \;\wedge\; (x \notin B \;\wedge\; x \notin C) && (\wedge\ conmuta)\\
&\Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; \overline{(x \in B \;\vee\; x \in C)} && (p \wedge p \Leftrightarrow p\ y\ Morgan)\\
&\Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; \overline{(x \in B \cup C)} && (def.\cup)\\
&\Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; x \notin B \cup C && (def.\notin)\\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) && (def.\setminus)
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$ en cualquier elemento x, luego $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

2. Hay que demostrar que $[B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \ \Leftrightarrow \ A = \emptyset]$.
   ($\Leftarrow$) Suponemos que $A = \emptyset$ es verdadero y hay que demostrar que $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ también es verdadero . Sea U nuestra referencia.

$$\begin{aligned}
B &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\
&= (\emptyset \cap B^c) \cup (\emptyset^c \cap B) && (hipótesis) \\
&= (\emptyset) \cup (U \cap B) && (prop{,}2y3) \\
&= U \cap B && (prop{,}2) \\
&= B && (prop{,}3)
\end{aligned}$$

   ($\Rightarrow$) Suponemos que $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ es cierto y demostramos que $A = \emptyset$. Tenemos que $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, si intersectamos con B obtenemos:

$$\begin{aligned}
B \cap B = [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap B \quad &\Leftrightarrow B = (A \cap B^c) \cap B \ \cup \ (A^c \cap B) \cap B && (prop{,}1 \ y \ 6) \\
&\Leftrightarrow B = A \cap (B^c \cap B) \ \cup \ A^c \cap (B \cap B) && (prop{,}5) \\
&\Leftrightarrow B = A \cap \emptyset \ \cup \ A^c \cap B && (prop{,}9 \ y \ 1) \\
&\Leftrightarrow B = \emptyset \ \cup \ A^c \cap B && (prop{,}2) \\
&\Leftrightarrow B = A^c \cap B && (prop{,}2) \\
&\Leftrightarrow B \subseteq A^c && (prop{,}13) \\
&\Leftrightarrow A \subseteq B^c && (prop{,}11) \\
&\Leftrightarrow A \cap B^c = A && (prop{,}13)
\end{aligned}$$

   Ahora intersectando con B^c:

$$\begin{aligned}
B \cap B^c = [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap B^c \quad &\Leftrightarrow \emptyset = (A \cap B^c) \cap B^c \ \cup \ (A^c \cap B) \cap B^c && (prop{,}6 \ y \ 9) \\
&\Leftrightarrow \emptyset = A \cap B^c \ \cup \ \emptyset && (prop{,}5, 1 \ y \ 9) \\
&\Leftrightarrow \emptyset = A \cap B^c && (prop{,}2)
\end{aligned}$$

   Entonces, tenemos que $A \cap B^c = A$ y $A \cap B^c = \emptyset$, por lo tanto llegamos a que $A = A \cap B^c = \emptyset$, que es lo que queriamos demostrar.

3. Suponemos que $A \Delta B = C$ es verdadero y tenemos que demostrar que $A \Delta C = B$:

$$
\begin{aligned}
A\Delta C &= A\Delta(A\Delta B) && (\textit{hipótesis})\\
&= A\cup(A\Delta B)\setminus A\cap(A\Delta B) && (\textit{prop},14)\\
&= A\cup[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\setminus A\cap[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c] && (\textit{prop},14\ \textit{y}\ 7)\\
&= A\cup(A\cup B)\ \cap\ A\cup(A\cap B)^c\setminus A\cap(A\cup B)\cap(A\cap B)^c && (\textit{prop},6\ \textit{y}\ 5)\\
&= (A\cup B)\ \cap\ A\cup(A^c\cup B^c)\setminus A\cap(A\cup B)\cap(A\cap B)^c && (\textit{prop},5\textit{y}1)\\
&= (A\cup B)\cap U\setminus A\cap(A\cup B)\cap(A\cap B)^c && (\textit{prop},5\ \textit{y}\ 9)\\
&= (A\cup B)\setminus A\cap(A\cup B)\cap(A\cap B)^c && (\textit{prop},3)\\
&= (A\cup B)\cap[A^c\cup(A\cup B)^c\cup(A\cap B)] && (\textit{prop},7,8\ \textit{y}\ 10)\\
&= (A\cup B)\cap A^c\ \cup\ (A\cup B)\cap(A\cup B)^c\ \cup\ (A\cup B)\cap(A\cap B) && (\textit{prop},6)\\
&= (A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)\cup\ \emptyset\ \cup\ (A\cup B)\cap(A\cap B) && (\textit{prop},6\ \textit{y}\ 9)\\
&= \emptyset\cup(B\cap A^c)\cup(A\cap B) && (\textit{prop},9,2\ \textit{y}\ 13)\\
&= (B\cap A^c)\cup(A\cap B) && (\textit{prop},2)\\
&= (A\cup A^c)\cap B && (\textit{prop},6)\\
&= U\cap B && (\textit{prop},9)\\
&= B && (\textit{prop},3)
\end{aligned}
$$

$\square$

P2) Sea A un subconjunto fijo del conjunto U. Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene que:

$$(X = Y) \Leftrightarrow (X\cup A = Y\cup A\ \wedge\ X\cap A = Y\cap A)$$

Solución:

($\Rightarrow$) directo, pues es sólo un cambio de nombre.

($\Leftarrow$) Suponemos que $X\cup A = Y\cup A\ \wedge\ X\cap A = Y\cap A$.
Notemos que:

$$X = [(X\cup A)\setminus A]\ \cup\ (X\cap A)$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
[(X \cup A) \setminus A] \; \cup \; (X \cap A) &= [(X \cup A) \cap A^c] \; \cup \; (X \cap A) && (prop,7) \\
&= [(X \cap A^c) \cup (A \cap A^c)] \cup (X \cap A) && (prop,6) \\
&= X \cap (A \cup A^c) && (prop,9,2 \; y \; 6) \\
&= X \cap U && (prop,3) \\
&= X
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
X &= [(X \cup A) \setminus A] \; \cup \; (X \cap A) \\
&= [(Y \cup A) \setminus A] \; \cup \; (Y \cap A) \qquad (hip\acute{o}tesis) \\
&= Y
\end{aligned}
$$

$\square$

P3) Sea A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de las partes de A. Demuestre que:

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
3. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
4. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Rightarrow A = B$

Solución:

1. Demostremos que $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$: sea $Q \in \mathcal{P}(A)$, entonces por definición $Q \subseteq A$. Además, como $A \subseteq B$, por transitividad tenemos que $Q \subseteq B$, lo que implica, por definición, que $Q \in \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$Q \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow Q \in \mathcal{P}(B)$$

   que es lo que queriamos demostrar.

2. Veamos que $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$: sea $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, entonces

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \ \vee \ C \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow C \subseteq A \ \vee \ C \subseteq B \\ &\Rightarrow C \subseteq A \cup B \\ &\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

Es decir, $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Como es cierto en cada $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ concluimos que $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
Notar que no tenemos una igualdad, dado que en el tercer paso no podemos usar, en general, una equivalencia.

3. Demostremos que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$: sea $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$, luego

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B \\ &\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

De donde se deduce el enunciado, pues lo anterior es cierto en cada C.

4. Veamos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Rightarrow A = B$: sea $x \in A$

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq \mathcal{P}(A) \\ &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq \mathcal{P}(B) \quad (\textit{hipótesis}) \\ &\Leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

Entonces $A = B$, pues lo anterior es cierto en cada x.

$\square$

P4) Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

1. $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.
2. $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
3. $(\forall\, X \in M)(\forall\, Y \in \mathcal{P}(E))\ X \cap Y \in M$.

4. $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

Solución:

1. Por demostrar que $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$: por definición $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$ para cualquier conjunto A. Por lo tanto $\emptyset \in M$.

   Veamos que $E \setminus A \in M$: sabemos que $E \setminus A \subseteq E$, por lo tanto $E \setminus A \in \mathcal{P}(E)$. Además,

$$\begin{aligned} A \cap (E \setminus A) \quad &= A \cap (E \cap A^c) \\ &= (A \cap A^c) \cap E \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

   asi, $E \setminus A \in M$.

2. Basta con demostrar que $A \in M \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow M = \mathcal{P}(E) \Rightarrow A \in M$.
   Primera implicancia: suponemos que $A \in M$, entonces $A \cap A = \emptyset$, pero $A \cap A = A$, con lo que concluimos que $A = \emptyset$.

   Segunda implicancia: suponemos que $A = \emptyset$, luego

$$\begin{aligned} M \quad &= \{x \in \mathcal{P}(E) | \emptyset \cap x = \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathcal{P}(E) | \emptyset = \emptyset\} \end{aligned}$$

   es decir, no pedimos condición adicional a x (sólo que pertenezca a $\mathcal{P}(E)$), por lo tanto $M = \mathcal{P}(E)$.

   Tercera implicancia: suponemos que $M = \mathcal{P}(E)$, entonces como $A \in \mathcal{P}(E)$, tenemos que $A \in M$.

3. Por demostrar que $(\forall\ X \in M)(\forall\ Y \in \mathcal{P}(E))\ X \cap Y \in M$.
   Sean $X \in M \wedge Y \in \mathcal{P}(E)$: primero notemos que $X \cap Y \in \mathcal{P}(E)$ (ya que la intersección entre subconjuntos de E sigue siendo un subconjunto de E). Falta verificar que $A \cap (X \cap Y) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} A \cap (X \cap Y) \quad &= (A \cap X) \cap Y \\ &= \emptyset \cap Y \qquad\qquad (\textit{ya que } X \in M) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

   Por lo tanto $X \cap Y \in M$.

4. Sean $X, Y \in M$, debemos probar que $[(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$. Verifiquemos primero que $[(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in \mathcal{P}(E)$, sabemos que:

$$X \setminus Y \subseteq X \subseteq E$$

$$Y \setminus X \subseteq Y \subseteq E$$

Entonces

$$(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \subseteq E \Leftrightarrow (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \subseteq \mathcal{P}(E)$$

Intersectemos con A:

$$\begin{aligned} A \cap [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] &= (A \cap (X \setminus Y)) \cup (A \cap (Y \setminus X)) \\ &= (A \cap (X \cap Y^c)) \cup (A \cap (Y \cap X^c)) \\ &= (\emptyset \cap Y^c) \cup (\emptyset \cap X^c)) \qquad (X, Y \in M) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\square$

P5) Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama Algebra de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

i) $E \in M$,

ii)$(\forall\ A, B \in M)\ A \cup B \in M$,

iii)$(\forall\ A \in M)\ A^c \in M$.

Se pide:

1. Demostrar que $\emptyset \in M$.
2. Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \cap B \in M$.
3. Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \Delta B \in M$.
4. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, averiguar si $M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es un Algebra. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

Solución:

1. Por (i), $E \in M$, y por (iii), $E^c \in M$. Pero $E^c = \emptyset$, por lo tanto $\emptyset \in M$.

2. Sean $A, B \in M$, veamos que $A \cap B \in M$:

$$\begin{aligned} A \in M \wedge B \in M &\Rightarrow A^c \in M \wedge B^c \in M \quad (\textit{por iii}) \\ &\Rightarrow A^c \cup B^c \in M \qquad (\textit{por ii}) \\ &\Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in M \qquad (\textit{por iii}) \\ &\Leftrightarrow A \cap B \in M \end{aligned}$$

3. Sean $A, B \in M$, demostremos que $A \Delta B \in M$:

$$\begin{aligned}
A \in M \wedge B \in M \quad & \Rightarrow A \cup B \in M \;\wedge\; A \cap B \in M && (\textit{por ii y b}) \\
& \Rightarrow A \cup B \in M \;\wedge\; (A \cap B)^c \in M && (\textit{por iii}) \\
& \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in M && (\textit{por b}) \\
& \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in M \\
& \Leftrightarrow A \Delta B \in M
\end{aligned}$$

4. Verifiquemos (i), (ii) y (iii):
(i) $E \in M$
(ii) Sea $A \in M$ entonces $\emptyset \cup A = A \in M$ y $E \cup A = E \in M$, por lo que basta revisar las uniones entre los elementos de $M \setminus \{E, \{\emptyset\}\}$:

$$- \; \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \in M$$

$$- \; \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in M$$

$$- \; \{1\} \cup \{3,4\} = \{1,3,4\} \notin M$$

$$- \; \{2\} \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in M$$

$$- \; \{2\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4\} \notin M$$

$$- \; \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in M$$

Entonces, para que M sea un Algebra habria que agregar los conjuntos $\{1,3,4\}$ y $\{2,3,4\}$. Notar que la unión de cualquiera de estos conjuntos con un elemento de M da él mismo o E, por lo que no hay que agregar más conjuntos dado que agregamos éstos.

iii)Sea $A \in M$, veamos que $A^c \in M$:

$$- \; \emptyset^c = E \in M$$

$$- \; E^c = \emptyset \in M$$

$$- \; \{1\}^c = \{2,3,4\} \in M \quad (\textit{lo acabamos agregar})$$

$$- \; \{2\}^c = \{1,3,4\} \in M \quad (\textit{lo acabamos agregar})$$

$$- \; \{1,2\}^c = \{3,4\} \in M$$

$$- \; \{3,4\}^c = \{1,2\} \in M$$

Conclusión: M no es un Algebra. Para que lo sea, hay que agregarle (como minimo) los conjuntos $\{1,3,4\}$ y $\{2,3,4\}$.

□

2.2. Problemas propuestos.

P1) Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Para cualquier par de conjuntos A *y* B siempre se tiene $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
2. Si A *y* B son conjuntos, entonces $A \Delta B \subseteq A$.
3. Se tiene que $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$.
4. $\mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.
5. Si A es un conjunto con al menos un elemento y $B \subseteq A$, entonces nunca se tiene que $B \setminus A = B$.
6. Para que $A \cup B = A$ el conjunto B debe ser vacio.

P2) Sean A, B, C conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

1. $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$
2. $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq A \wedge A \subseteq C)$
3. $(A \cap C = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
4. $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (A \Delta C)$

P3) Sea B un subconjunto del conjunto U. Pruebe que:

1. $[(\forall\ A \subseteq U)(A \cup B = A)]\ \Rightarrow B = \emptyset$.
2. Colocar el signo de inclusión, igualdad o ninguno entre $\mathcal{P}(U \setminus B)$ *y* $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$.

P4) Sea $A \subseteq U, A \neq \emptyset$, se define la familia:

$$\mathcal{F}_A = \{B \subseteq U | B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Demuestre que:

1. $\emptyset \neq \mathcal{F}_A, U \in \mathcal{F}_A, A \in \mathcal{F}_A$.
2. $A \setminus B \neq \emptyset\ \wedge\ B \in \mathcal{F}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$.
3. $B \in \mathcal{F}_A\ \wedge\ C \subseteq U \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$.
4. $B, C \in \mathcal{F}_A\ \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B \Delta C \in \mathcal{F}_A$.

Capítulo 3

Funciones

3.1. Problemas resueltos.

P1) Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones (no necesariamente biyectivas)

1. Sea $A \subseteq G$. Probar que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.
2. Sea $B \subseteq F$. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Solución:

1. Como $f : E \to F$ y $g : F \to G$, entonces $g \circ f : E \to G$. Luego como $A \subseteq G$, $(g \circ f)^{-1}(A) = \{x \in E | g \circ f(x) \in A\}$ está bien definida. Sea $x \in E$, entonces:

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(A) &\Leftrightarrow g \circ f(x) \in A \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) \in A \\ &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto dado que la propiedad es cierta en todo x, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

2. Por demostrar que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$. Probaremos cada inclusión por separado.
($\subseteq$)
Notemos primero que como $f^{-1}(B) \subseteq E$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq f(E)$. Luego sólo falta verificar que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$:

Sea $x \in f(f^{-1}(B))$, entonces $x = f(y)$ para cierto $y \in f^{-1}(B)$. Pero

$$y \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(y) \in B,$$

y como $x = f(y)$, tenemos que $x \in B$. Por lo tanto $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E)$.

$(\supseteq)$
Sea $x \in f(E) \cap B$, entonces

$$\begin{aligned} x \in f(E) \cap B \quad & \Leftrightarrow x \in f(E) \ \wedge \ x \in B \\ & \Leftrightarrow \exists y \in E \ tal \ que \ x = f(y) \ \wedge \ x \in B \\ & \Rightarrow f(y) \in B \\ & \Rightarrow y \in f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $x = f(y) \ \wedge \ y \in f^{-1}(B)$, por lo tanto $x \in f(f^{-1}(B))$. Como esto es cierto en cada x, concluimos la inclusión deseada.

$\square$

P2) Sea $f : E \to F$ una función.

1. Pruebe que $\forall \ A \subseteq F, \ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
2. Pruebe que $\forall \ A \subseteq F, \ \forall \ B \subseteq F, \ f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

Solución:

1. Sea $A \subseteq F$, entonces

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A^c) \quad & \Leftrightarrow f(x) \in A^c \\ & \Leftrightarrow f(x) \notin A \\ & \Leftrightarrow \overline{f(x) \in A} \\ & \Leftrightarrow \overline{x \in f^{-1}(A)} \\ & \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \\ & \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c \end{aligned}$$

   Por lo tanto, como lo anterior es cierto en todo x, $\forall \ A \subseteq F, \ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

2. Sean $A, B \subseteq F$, entonces

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B) \quad &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) \cap (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))^c \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \cap (f^{-1}(A \cap B))^c && (\textit{prop. preimagen}) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \cap (f^{-1}((A \cap B)^c)) && (\textit{parte } (a)) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) && (\textit{prop. preimagen}) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A\Delta B)
\end{aligned}
$$

De donde concluimos la igualdad deseada.

□

P3) 1. Sea $f : E \to F$ una función y A, B subconjuntos de E. Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; f(A \cup B) = f(A).$$

2. Sea $f : E \to F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall\ A, B \subseteq E,\ (A \subseteq B \wedge A \neq B) \;\Rightarrow\; f(A) \neq f(B).$$

Probar que f es inyectiva.

Solución

1. Suponemos que $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$, luego

$$
\begin{aligned}
f(B) \setminus f(A) = \emptyset \quad &\Rightarrow f(B) \cap f(A)^c = \emptyset \\
&\Rightarrow f(B) \subseteq f(A) \\
&\Rightarrow f(A) \cup f(B) = f(A) \\
&\Rightarrow f(A \cup B) = f(A)
\end{aligned}
$$

2. Sean $x_1, x_2 \in E$ distintos y definamos los subconjuntos de E:

$$A = \{x_1\} \ y \ B = \{x_1, x_2\} \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B.$$

Entonces por hipótesis, tenemos que

$$f(A) \neq f(B) \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \neq f(\{x_1, x_2\}) \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \neq f(x_1) \cup f(x_2)$$

lo que implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (pues $f(x_1) \cup f(x_1) = f(x_1)$). Es decir, si tenemos $x_1, x_2 \in E$ distintos, sus imágenes por f son distintas también, por lo tanto f es inyectiva.

□

P4) 1. Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

a) Determine si f, g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

b) Determine los conjuntos preimágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$.

2. Sea $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva } \}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : E \to E$ tal que para cada $f \in E$, $\psi(f) = f^{-1}$, es decir ψ le asocia a cada función en E su inversa.

a) Probar que ψ es biyectiva.

b) Sean $f, g \in E$. Probar que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

Solución:

1. a) **inyectividad:**

- para f: sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $f(n_1) = f(n_2)$, luego

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) \quad & \Leftrightarrow \tfrac{1}{2n_1} = \tfrac{1}{2n_2} \\ & \Leftrightarrow 2n_2 = 2n_1 \\ & \Leftrightarrow n_1 = n_2 \\ & \Rightarrow f \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

- para g: sean q_1, q_2 tales que $g(q_1) = g(q_2)$, entonces

$$\begin{aligned} g(q_1) = g(q_2) \quad & \Leftrightarrow \tfrac{q_1}{2} = \tfrac{q_2}{2} \\ & \Leftrightarrow q_1 = q_2 \\ & \Rightarrow g \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

- para $g \circ f$: primero notemos que $g \circ f$ está bien definida, pues $Rec(f) = Dom(g) = \mathbb{Q}$. Además, como $g \circ f$ es composición de dos funciones inyectivas, entonces es inyectiva.

sobreyectividad:

- para f: tenemos que $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, sea $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que ver si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f(n) = q$, es decir, tal que $\frac{1}{2n} = q$. Pero es directo que $q = 0$ no tiene preimagen, pues no existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{2n} = 0$.
Por lo tanto f no es sobreyectiva. Notar que además del 0 hay muchos racionales que no tienen preimagen, pues en general $\frac{1}{2q} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cuando $q \in \mathbb{Q}$.

- para g: sea $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que ver si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $g(r) = q$, es decir, $\frac{r}{2} = q$. Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $2q \in \mathbb{Q}$, por lo tanto para $q \in \mathbb{Q}$ su preimagen es $2q$, con lo que concluimos que g es sobreyectiva.

- para $g \circ f$: sea $q \in \mathbb{Q}$, veamos si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $g \circ f(n) = q$. Se tiene,

$$\begin{aligned} g \circ f(n) = q \quad &\Leftrightarrow g(f(n)) = q \\ &\Leftrightarrow g(\tfrac{1}{2n}) = q \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{4n} = q \end{aligned}$$

  Igual que en el caso de f, vemos que $q = 0$ no tiene preimagen. Por lo tanto $g \circ f$ no es sobreyectiva.

b) • conjunto preimagen de $g^{-1}(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbb{Z}) \quad &= \{q \in \mathbb{Q} |\ g(q) \in \mathbb{Z}\ \} \\ &= \{q \in \mathbb{Q} |\ \tfrac{q}{2} \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\tfrac{a}{b} |\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \wedge\ \tfrac{a}{2b} \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\tfrac{a}{b} |\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \wedge\ a = 2bk\ con\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

• conjunto preimagen de $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) \quad &= \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} |\ (g \circ f)(n) \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} |\ \tfrac{1}{4n} \in \mathbb{Z}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

pues $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \frac{1}{4n} \in (0, \frac{1}{4}]$ y $(0, \frac{1}{4}] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

2. *a*) Veamos que ψ es biyectiva

inyectividad: sean $f, g \in E$ tal que $\psi(f) = \psi(g)$, es decir $f^{-1} = g^{-1}$, luego $f = g$. En efecto:

$$\begin{aligned} f^{-1} = g^{-1} \quad &\Rightarrow f^{-1} \circ g = g^{-1} \circ g \\ &\Rightarrow f^{-1} \circ g = id \qquad (g\ es\ biyectiva) \\ &\Rightarrow f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ id \\ &\Rightarrow g = f \qquad (asociatividad\ de\ \circ) \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ es inyectiva.

sobreyectividad: sea $f \in E$, veamos que existe $g \in E$ tal que $\psi(g) = f$, es decir $g^{-1} = f$.
Para esto basta tomar $g = f^{-1}$, ya que $(f^{-1})^{-1} = f$ (recordar que f^{-1} existe, pues f es biyectiva).

b) Sean f, $g \in E$. Veamos que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

$$\begin{aligned} \psi(f \circ g) &= (f \circ g)^{-1} \\ &= g^{-1} \circ f^{-1} \quad (\textit{problema } 1) \\ &= \psi(g) \circ \psi(f) \end{aligned}$$

□

P5) Sean $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ dos funciones biyectivas. Definimos

$$\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' \mid h \text{ es una función } \} \ y \ \mathcal{F}_{B,B'} = \{\bar{h} : B \to B' \mid \bar{h} \text{ es una función } \}.$$

Considere además la función $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \to \mathcal{F}_{B,B'}$ tal que a cada $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ le asocia la función $\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

1. Probar que ψ es una biyección.
2. Probar que h es inyectiva si y sólo si $\psi(h)$ es inyectiva.
3. Probar que h es sobreyectiva si y sólo si $\psi(h)$ es sobreyectiva.

Solución:

1. **inyectividad:** sean $h, k \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tales que $\psi(h) = \psi(k)$, luego

$$\begin{aligned} \psi(h) = \psi(k) &\Leftrightarrow g \circ h \circ f^{-1} = g \circ k \circ f^{-1} \\ &\Rightarrow (g \circ h \circ f^{-1}) \circ f = (g \circ k \circ f^{-1}) \circ f \\ &\Rightarrow g \circ (h \circ f^{-1} \circ f) = g \circ (k \circ f^{-1} \circ f) \\ &\Rightarrow g \circ (h \circ id) = g \circ (k \circ id) \\ &\Rightarrow g \circ h = g \circ k \\ &\Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ h) = g^{-1} \circ (g \circ k) \quad (g \textit{ biyectiva}) \\ &\Rightarrow h = k \end{aligned}$$

por lo tanto ψ es inyectiva.

sobreyectividad: sea $\bar{h} \in \mathcal{F}_{B,B'}$, veamos que existe $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tal que $\psi(h) = \bar{h}$, es decir, $g \circ h \circ f^{-1} = \bar{h}$. Haciendo un procedimiento análogo al anterior, vemos que la función $h = g^{-1} \circ \bar{h} \circ f$ cumple con $\psi(h) = \bar{h}$. Verifiquemos que esta función h está bien definida y que pertenece a $\mathcal{F}_{A,A'}$.
Para que esté bien definida, debemos tener que:

$$Rec(f) \subseteq Dom(\bar{h}) \ \wedge \ Rec(\bar{h}) \subseteq Dom(g^{-1})$$

lo que se cumple.
Veamos por último que pertenece a $\mathcal{F}_{A,A'}$:

$$- \ g \circ \bar{h} \circ f : Dom(f) \to Rec(g^{-1} \circ \bar{h})$$

$$- \ Rec(g^{-1} \circ \bar{h}) = Rec(g^{-1})$$

y como $Dom(f) = A \ \wedge \ Rec(g^{-1}) = A'$ obtenemos que ψ es sobreyectiva.

2. ($\Rightarrow$) Suponemos h inyectiva. Veamos que $\psi(h)$ es inyectiva:
$\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1} = (g \circ h) \circ f^{-1}$. Ahora, como f es sobreyectiva, entonces f^{-1} es sobreyectiva y se concluye que f^{-1} es inyectiva. Además $g \circ h$ es inyectiva, pues la composición de funciones inyectivas es inyectiva, de lo que concluimos que $\psi(h)$ es inyectiva (composición de inyectivas).

   ($\Leftarrow$) Suponemos que $\psi(h)$ es inyectiva. Veamos que h es inyectiva: como f y g^{-1} son inyectivas, entonces $g^{-1} \circ \psi(h) \circ f$ es inyectiva, pero:

$$g^{-1} \circ \psi(h) \circ f = g^{-1} \circ g \circ h \circ f^{-1} \circ f = h$$

   por lo tanto h es inyectiva.

3. Esta parte es exactamente igual a la parte anterior, pues la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva y f, g, f^{-1} *y* g^{-1} son funciones sobreyectivas.

□

P6) Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$.

1. Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
2. Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.
3. Calcular $g \circ f(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución:

1. **inyectividad:**

   - para f: sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = f(m)$

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow 2n+1 = 2m+1 \\ &\Leftrightarrow 2n = 2m \\ &\Leftrightarrow n = m \\ &\Leftrightarrow f \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$

- para g: sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $g(n) = g(m)$

$$\begin{aligned} g(n) = g(m) \quad &\Leftrightarrow n^2+1 = m^2+1 \\ &\Leftrightarrow n^2 = m^2 \\ &\Leftrightarrow n = m \quad (\textit{notar que esta equivalencia no serßa cierta si } n \vee m \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow g \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$

sobreyectividad:

- para f: sea $n \in \mathbb{N}$, veamos si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2m+1 = n$. Nos serviria $m = \frac{n-1}{2}$, pero queremos que $m \in \mathbb{N}$ y para que esto se cumpla debemos tener que n es impar. Por lo tanto sólo tienen preimagen los impares, lo que implica que f no es sobreyectiva.

- para g: sea $n \in \mathbb{N}$, veamos si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m) = n$

$$\begin{aligned} g(m) = n \quad &\Leftrightarrow m^2+1 = n \\ &\Leftrightarrow m = \sqrt{n-1} \notin \mathbb{N} \textit{ en general} \\ &\Rightarrow g \text{ no es sobreyectiva} \end{aligned}$$

Entonces, dado que ni f ni g son sobreyectivas, ninguna es biyectiva.

2. $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es tal que: sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f \circ g(n) \quad &= f(g(n)) \\ &= f(n^2+1) \\ &= 2(n^2+1) \\ &= 2n^2+3 \end{aligned}$$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es tal que: sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(n) &= g(f(n)) \\ &= g(2n+1) \\ &= (2n+1)^2 + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g \circ f(A) &= \{n \in \mathbb{N} |\ \exists a \in A,\ g \circ f(a) = n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} |\ \exists a \in \{1,2,3,4,5\},\ 4a^2 + 4a + 2 = n\} \\ &= \{10, 26, 50, 82, 122\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(A) &= \{n \in \mathbb{N} |\ g \circ f(n) \in \{1,2,3,4,5\}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} |\ 4n^2 + 4n + 2 \in \{1,2,3,4,5\}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

□

3.2. Problemas propuestos.

P1) Sea $f : E \to F$ una función y $A, B \subseteq E$.

1. Demostrar que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
2. Ã¸ Qué condición debe cumplir f para que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?
3. Ã¸ Qué condición debe cumplir f para que $f(E \setminus B) = F \setminus f(B)$?

P2) Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.

P3) Sean $f : E \to F$ y $g : F \to E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.

P4) Sea la función $f : [3, +\infty) \to [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva y determinar f^{-1}.

P5) Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.

1. Verificar que f, g y h son invertibles.
2. Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.
3. Deducir de (ii) que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.

P6) Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que: $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$ para todo $X \subseteq E$.

1. Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.
2. Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.
3. Determinar si f y g son sobreyectivas.
4. Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.
5. Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.

Capítulo 4

Relaciones

4.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre el conjunto A. Decimos que ella es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in A,\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \ \Rightarrow\ z\mathcal{R}x).$$

Probar que si $\mathcal{R}$ es refleja y circular, entonces la relación es de equivalencia.

2. Sea $A = \mathbb{R}$ y considere la relación definida sobre A por

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 + y = y^2 + x$$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar la clase de equivalencia de un real cualquiera $x = a$.

Solución:

1. Para probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia, debemos probar que es refleja, simétrica y transitiva.

refleja: lo es por hipótesis

simétrica: sean $a, b \in A$ y veamos que $a\ \mathcal{R}\ b \Rightarrow b\ \mathcal{R}\ a$. Sabemos que $\forall b \in A, \quad b\ \mathcal{R}\ b$, pues $\mathcal{R}$ es refleja, por lo tanto, tenemos que:

$$a\ \mathcal{R}\ b \wedge b\ \mathcal{R}\ b \Rightarrow b\ \mathcal{R}\ a \quad (\mathcal{R}\ \textit{circular})$$

transitiva: debemos demostrar que $\forall a, b, c \in A, \quad a\ \mathcal{R}\ b \wedge b\ \mathcal{R}\ c \Rightarrow a\ \mathcal{R}\ c$.

Suponemos cierto que $a\ \mathcal{R}\ b \wedge b\ \mathcal{R}\ c$. Luego,

$$\begin{aligned} a\ \mathcal{R}\ b \wedge b\ \mathcal{R}\ c \quad &\Rightarrow c\ \mathcal{R}\ a \qquad (\mathcal{R}\ \textit{circular}) \\ &\Rightarrow a\ \mathcal{R}\ c \quad (\mathcal{R}\ \textit{simétrica}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2. *a*) Veamos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

refleja: sea $a \in \mathbb{R}$, hay que ver si $a \ \mathcal{R} \ a$, pero esto es directo ya que $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 + a = a^2 + a$.

simétrica: sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \ \mathcal{R} \ b$, debemos demostrar que $b \ \mathcal{R} \ a$.

$$\begin{aligned} a \ \mathcal{R} \ b & \Leftrightarrow a^2 + b = b^2 + a & (def.) \\ & \Leftrightarrow b^2 + a = a^2 + b & (= \ \textit{es simétrico}) \\ & \Leftrightarrow b \ \mathcal{R} \ a \end{aligned}$$

transitiva: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \ \mathcal{R} \ b \ \wedge \ b \ \mathcal{R} \ c$, tenemos que probar que $a \ \mathcal{R} \ c$.

$$a \ \mathcal{R} \ b \ \wedge \ b \ \mathcal{R} \ c \ \Leftrightarrow \ a^2 + b = b^2 + a \ \wedge \ b^2 + c = c^2 + b$$

restando las ecuaciones anteriores obtenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b = b^+ a \wedge b^2 + c = c^2 + b & \Rightarrow (a^2 + b) - (c^2 + b) = (b^2 + a) - (b^2 + c) \\ & \Leftrightarrow a^2 - c^2 = a - c \\ & \Leftrightarrow a^2 + c = c^2 + a \\ & \Leftrightarrow a \ \mathcal{R} \ c \end{aligned}$$

b) clase de equivalencia de un real a:

$$\begin{aligned} [a]_{\mathbb{R}} & = \{b \in \mathbb{R} | \ a \ \mathcal{R} \ b\} \\ & = \{b \in \mathbb{R} | \ a^2 + b = b^2 + a\} \\ & = \{b \in \mathbb{R} | \ a^2 - b^2 = a - b\} \\ & = \{b \in \mathbb{R} | \ (a + b)(a - b) = a - b\} \\ & = \{b \in \mathbb{R} | \ a + b = 1\} \cup \{a\} & (\textit{recordar que no se puede dividir por } 0) \\ & = \{1 - a, a\} \end{aligned}$$

$\square$

P2) Sea E un conjunto no vacio. Sea $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E por:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a\mathcal{P}b \ \wedge \ b\mathcal{P}a.$$

1. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2. Sea $E/\mathcal{R} = \{[a]_\mathcal{R} \mid a \in E\}$ donde $[a]_\mathcal{R} = \{b \in E \mid a\mathcal{R}b\}$.
   a) Probar que si $a' \in [a]_\mathcal{R} \ \wedge \ b' \in [b]_\mathcal{R}$, entonces $a\mathcal{P}b \Longleftrightarrow a'\mathcal{P}b'$.
   b) Se define la relación $\mathcal{Q}$ sobre $E/\mathcal{R}$ por:
   $$[a]_\mathcal{R}\mathcal{Q}[b]_\mathcal{R} \Longleftrightarrow a\mathcal{P}b.$$
   Probar que $\mathcal{Q}$ es de orden sobre $E/\mathcal{R}$.

Solución:

1. Veamos que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

   refleja: sea $a \in E$, luego
   $$\begin{aligned} a\ \mathcal{R}\ a \quad &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ a\ \wedge\ a\ \mathcal{P}\ a \\ &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ a \end{aligned}$$
   es decir, $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $\mathcal{P}$ lo es y como $\mathcal{P}$ es refleja por hipótesis, tenemos que $\mathcal{R}$ es refleja.

   simétrica : sean $a, b \in E$, luego
   $$\begin{aligned} a\ \mathcal{R}\ b \quad &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ a \\ &\Leftrightarrow b\ \mathcal{P}\ a\ \wedge\ a\ \mathcal{P}\ b \quad (\wedge\ \textit{simétrico}) \\ &\Leftrightarrow b\ \mathcal{R}\ a \end{aligned}$$
   por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica.

   transitiva: sean $a, b, c \in E$, luego
   $$\begin{aligned} a\ \mathcal{R}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{R}\ c \quad &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ a\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ c\ \wedge\ c\ \mathcal{P}\ b \\ &\Leftrightarrow (a\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ c)\ \wedge\ (c\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ a) \\ &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ c\ \wedge\ c\ \mathcal{P}\ a \qquad\qquad (\mathcal{P}\ \textit{es transitiva}) \\ &\Leftrightarrow a\ \mathcal{R}\ c \end{aligned}$$
   por lo tanto $\mathcal{R}$ es transitiva (notar que en el tercer paso es una implicancia y no una equivalencia, puesto que $a\ \mathcal{P}\ c$ no implica que $a\ \mathcal{P}\ b \wedge b\ \mathcal{P}\ c$, análogamente con $c\ \mathcal{P}\ a$). Concluimos finalmente que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2. *a)* Sean $a' \in [a]_\mathbb{R} \wedge b' \in [b]_\mathbb{R}$, veamos que $a\ \mathcal{P}\ b \Leftrightarrow a'\ \mathcal{P}\ b'$:
   ($\Rightarrow$) suponemos que $a\ \mathcal{P}\ b$. Tenemos que:
   $$a' \in [a]_\mathbb{R} \Leftrightarrow a'\ \mathcal{R}\ a \Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ a'\ \wedge\ a'\ \mathcal{P}\ a$$
   y
   $$b' \in [b]_\mathbb{R} \Leftrightarrow b'\ \mathcal{R}\ b \Leftrightarrow b\ \mathcal{P}\ b'\ \wedge\ b'\ \mathcal{P}\ b$$
   Entonces, en particular, tenemos que:
   $$a'\ \mathcal{P}\ a\ \wedge a\ \mathcal{P}\ b \Rightarrow a'\ \mathcal{P}\ b \quad (\mathcal{P}\ \textit{transitiva})$$

Análogamente (ocupando lo anterior y que $b\ \mathcal{P}\ b'$) obtenemos que $a'\ \mathcal{P}\ b'$ que es lo que queriamos.

($\Leftarrow$) suponemos cierto que $a'\ \mathcal{P}\ b'$ y debemos demostrar que $a\ \mathcal{P}\ b$. El procedimiento es exactamente el mismo que ocupamos en la parte anterior (usando las relaciones que no fueron usadas. Hacer como ejercicio).

b) Para ver que $\mathcal{Q}$ es de orden, debemos probar que es refleja, antisimétrica y transitiva.

refleja: directo, pues $\mathcal{P}$ es refleja.

antisimétrica: sean $a, b \in E$ debemos probar que

$$[a]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [b]_{\mathbb{R}}\ \wedge\ [b]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [a]_{\mathbb{R}} \Rightarrow [a]_{\mathbb{R}} = [b]_{\mathbb{R}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [a]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [b]_{\mathbb{R}}\ \wedge\ [b]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [a]_{\mathbb{R}} &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ a \\ &\Leftrightarrow a\ \mathcal{R}\ b \\ &\Leftrightarrow [a]_{\mathbb{R}} = [b]_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{Q}$ es antisimétrica.

transitiva: sean $a, b, c \in E$, luego

$$\begin{aligned} [a]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [b]_{\mathbb{R}}\ \wedge\ [b]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [c]_{\mathbb{R}} &\Leftrightarrow a\ \mathcal{P}\ b\ \wedge\ b\ \mathcal{P}\ c \\ &\Rightarrow a\ \mathcal{P}\ c \qquad\qquad (\mathcal{P}\ trans.) \\ &\Leftrightarrow [a]_{\mathbb{R}}\ \mathcal{Q}\ [c]_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

luego $\mathcal{Q}$ es transitiva.
Concluimos finalmente que $\mathcal{Q}$ es una relación de orden.

$\square$

P3) Considere el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los números naturales.

Se define la relación $\mathcal{R}_1$ en $\mathbb{N}^n$ por: $\forall\, x, y \in \mathbb{N}^n$,

$$x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, ..., \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i.$$

1. Demuestre que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden parcial.
2. Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual de n-tuplas:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^n,\ x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x_i \leq y_i\ \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Demuestre que $x\mathcal{R}_2 y \Rightarrow x\mathcal{R}_1 y$.
Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa. Para ello construya un contraejemplo.

Solución:

1. Verifiquemos primero que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden:
   refleja: hay que ver que $\forall x \in \mathbb{N}^n,\ x\ \mathcal{R}_1\ x$, lo que es directo pues
$$\forall i \in \{1,...,n\},\ x_i \leq x_i \ \Rightarrow\ \forall m \in \{2,...,n\},\ \sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{i=1}^{m} x_i.$$
   antisimétrica: sean $x, y \in \mathbb{N}^n$ tales que $x\ \mathcal{R}_1\ y \wedge y\ \mathcal{R}_1\ x$, lo que es equivalente a
$$x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
   y
$$y_1 \leq x_1,\ y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$
   Luego
$$x_1 = y_1,\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
   Por lo tanto
$$\forall y \in \{1,...,n\},\ x_i = y_i \ \Leftrightarrow\ x = y.$$
   Con lo que concluimos que $\mathcal{R}_1$ es antisimétrica.
   transitiva: sean $x, y, z \in \mathbb{N}^n$ tales que $x\ \mathcal{R}_1\ y\ \wedge\ y\ \mathcal{R}_1\ z$, esto es equivalente a
$$x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
   y
$$y_1 \leq z_1,\ y_1 + y_2 \leq z_1 + z_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i.$$
   Entonces
$$x_1 \leq y_1 \leq z_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 \leq z_1 + z_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i.$$
   Por lo tanto
$$x_1 \leq z_1,\ x_1 + x_2 \leq z_1 + z_2, ...,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i \ \Leftrightarrow\ x\ \mathcal{R}_1\ z.$$
   Asi, $\mathcal{R}_1$ es transitiva y concluimos finalmente que es una relación de orden. Veamos que $\mathcal{R}_1$ es un orden parcial: debemos encontrar $x, y \in \mathbb{N}^n$ tales que $y \not\mathcal{R}_1 x$ y $x \not\mathcal{R}_1 y$. Sean:
$$x = (1, 8, x_3, ..., x_n) \quad \text{con } x_3, ..., x_n \in \mathbb{N}$$
$$y = (2, 4, y_3, ..., y_n) \quad \text{con } y_3, ..., y_n \in \mathbb{N}$$
   Entonces $x_1 = 1 \leq y_1 = 2$, pero $x_1 + x_2 = 9 \not\leq y_1 + y_2 = 6$, luego $x \not\mathcal{R}_1 y$. Y como $x_1 \leq y_1$, entonces $y \not\mathcal{R}_1 x$. Por lo tanto $\mathcal{R}_1$ es un orden parcial.

2. Sean $x, y \in \mathbb{N}^n$ tales que $x \mathcal{R}_2 y$.
$$\begin{aligned} x \mathcal{R}_2 y \quad & \Leftrightarrow \forall i \in \{1, .., n\},\ x_i \leq y_i \\ & \Leftrightarrow x_1 \leq y_1\ (1),\ x_2 \leq y_2\ (2), ...,\ x_n \leq y_n\ (n) \end{aligned}$$
Queremos demostrar que $x \mathcal{R}_1 y$, es decir que
$$x_1 \leq y_1\ (1'),\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2\ (2'), ..., \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i\ (n')$$
Pero esto es directo, pues
$$\forall m \in \{1, ..., n\},\ \sum_{k=1}^{m} (k) = (m').$$
Veamos que la otra implicancia es falsa: sean $x, y \in \mathbb{N}^n$ tales que
$$\begin{aligned} x &= (1, 1, ..., 1) \\ y &= (n, 0, ..., 0) \end{aligned}$$
entonces $x \mathcal{R}_1 y$, pero $x \not\mathcal{R}_2 y$.

$\square$

P4) Sea X un conjunto y $\mathcal{P}$ el conjunto de las particiones finitas de X. Es decir contiene a las familias finitas de subconjuntos de X, $(A_i)_{i=1}^n$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, $A_i \neq \phi$ y $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$. En $\mathcal{P}$ definimos la relación:
$$(A_i)_{i=1}^n \leq_* (B_j)_{j=1}^m \ \Leftrightarrow\ \forall j \in \{1, ..., m\},\ \exists i \in \{1, ..., n\},\ B_j \subseteq A_i.$$

1. Probar que $\leq_*$ es una relación de orden.
2. Probar que el orden es parcial si X tiene al menos tres elementos.
3. Probar que si $(A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{P}$ y $(B_j)_{j=1}^m \in \mathcal{P}$, entonces
$$(A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m = \{A_i \cap B_j \mid i \in \{1, .., n\}, j \in \{1, ..., m\}, A_i \cap B_j \neq \phi\} \in \mathcal{P}.$$
4. Probar que $(A_i)_{i=1}^n \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$ y $(B_j)_{j=1}^m \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$.

Solución:

1. Veamos que $\leq_*$ es una relación de orden.

   refleja: sea $(A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{P}$, claramente esta relación es refleja, ya que $\forall j \in \{1, ..., n\},\ A_j \subseteq A_j$, es decir, dado un $j \in \{1, ...n\}$ basta tomar $i = j$.

antisimétrica: sean $(A_i)_{i=1}^n$ y $(B_j)_{j=1}^m$ en $\mathcal{P}$ tales que $(A_i)_{i=1}^n \leq_* (B_j)_{j=1}^m$, lo que es equivalente con

$$\forall j \in \{1,...,m\},\ \exists i \in \{1,...,n\},\ B_j \subseteq A_i \ (1)$$

y

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \exists k \in \{1,...,m\},\ A_i \subseteq B_k \ (2)$$

Sea $j \in \{1,...,m\}$ y sea i el indice dado por (1), es decir, $B_j \subseteq A_i$. Ahora, por (2), para este i existe un k tal que $A_i \subseteq B_k$. Luego tenemos que $B_j \subseteq A_i \wedge A_i \subseteq B_k$. Por transitividad concluimos que $B_j \subseteq B_k$. Además $j = k$ (ya que como $(B_j)_{j=1}^m$ es una partición $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $i \neq j$). Es decir, $B_j \subseteq A_i \subseteq B_j$ y $B_j = A_i$.
Entonces, dado $j \in \{1,...,m\}$ existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $B_j = A_i$, lo que implica que $n \geq m$.
Repitiendo el mismo argumento, pero ahora considerando (2) primero, llegamos a que

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \exists j \in \{1,...,m\},\ A_i = B_j$$

y concluimos que $n \leq m$. Esto prueba que $m = n$ y

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \exists j \in \{1,...,n\},\ A_i = B_j.$$

Lo que implica que $(A_i)_{i=1}^n = (B_j)_{j=1}^n$.
Por lo tanto $\leq_*$ es antisimétrica.

transitiva: sean $(A_i)_{i=1}^n, (B_j)_{j=1}^m, (C_k)_{k=1}^p$ tales que

$$(A_i)_{i=1}^n \leq_* (B_j)_{j=1}^m \ \wedge \ (B_j)_{j=1}^m \leq_* (C_k)_{k=1}^p$$

lo que es equivalente a:

$$\forall j \in \{1,...,m\},\ \exists i \in \{1,...,n\},\ B_j \subseteq A_i \quad (1)$$

y

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \exists j \in \{1,...,m\},\ C_k \subseteq B_j \quad (2)$$

Sea $k \in \{1,...,p\}$, entonces por (2) existe $j \in \{1,...,m\}$ tal que $C_k \subseteq B_j$. Ahora, por (1), para este j tenemos que existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $B_j \subseteq A_i$. Resumiendo, tenemos que

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \exists j \in \{1,...,m\},\ \exists i \in \{1,...,n\},\ C_k \subseteq B_j \subseteq A_i.$$

Luego,

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \exists i \in \{1,...,n\},\ C_k \subseteq A_i.$$

De lo que concluimos que $(C_k)_{k=1}^p \leq_* (A_i)_{i=1}^n$. Por lo tanto $\leq_*$ es transitiva y $\leq_*$ es una relación de orden.

2. Supongamos que $X = \{a,b,c\} \cup Y$ con $\{a,b,c\} \cap Y = \emptyset$ (esto es cierto, pues X tiene almenos tres elementos). Para que el orden sea parcial debemos buscar dos elementos en $\mathcal{P}$ que no sean comparables.
Tomemos las particiones $(A_i)_{i=1}^2$ y $(B_j)_{j=1}^2$ tales que

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{a,b\} \cup Y & \qquad B_1 = \{a,c\} \cup Y \\ A_2 = \{c\} & \qquad B_2 = \{b\} \end{array}$$

B_1 no es subconjunto de A_1 ni de A_2 y A_1 no es subconjunto de B_1 ni de B_2, por lo tanto $(A_i)_{i=1}^2$ y $(B_j)_{j=1}^2$ no son comparables con $\leq_*$.

3. Sean $(A_i)_{i=1}^n$ y $(B_j)_{j=1}^m$ en $\mathcal{P}$, veamos que:

$$(A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m = \{A_i \cap B_j \mid i \in \{1,..,n\}, j \in \{1,...,m\}, A_i \cap B_j \neq \phi\} \in \mathcal{P}.$$

Sea $(C_k)_{k \in I} = (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$, demostremos que cumple las propiedades de los elementos de $\mathcal{P}$:

- I finito:
  $|I| = |\{A_i \cap B_j \mid i \in \{1,..,n\}, j \in \{1,...,m\}, A_i \cap B_j \neq \phi\}| \leq nm < \infty$

  Notar que el cardinal de Y es $\leq$ y no $=$ a m, pues estamos dejando afuera las intersecciones que dan $\emptyset$.

- $\bigcup_{i \in I} \ C_i = X$:

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \in I} \ C_k &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n A_i \quad ((B_j) \ \textit{partición}) \\ &= X \quad ((A_i) \ \textit{partición}) \end{aligned}$$

- $(\forall i \in I)$, $C_i \neq \emptyset$:
  Esto lo tenemos por definición.

- $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$:
  Sean C_i, C_j con $i, j \in I$ distintos, entonces son de la forma

$$C_i = A_p \cap B_q \ \ \textit{con} \ p \in \{1,...,n\}, \ q \in \{1,...,m\}$$

$$C_j = A_k \cap B_l \ \ \textit{con} \ k \in \{1,...,n\}, \ l \in \{1,...,m\}$$

  donde no se tiene que $p = k \wedge q = l$, pues $i \neq j$. Entonces:

$$C_i \cap C_j = A_p \cap B_q \cap A_k \cap B_l = \emptyset$$

  pues $p \neq k \vee q \neq l$, lo que implica que: $A_p \cap A_k = \emptyset \vee B_q \cap B_l = \emptyset$.

4. debemos probar que $(A_i)_{i=1}^n \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$ y $(B_j)_{j=1}^m \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$. Probaremos la primera relación, la segunda es análoga.
Sea $(C_i)_{i \in I}$ como lo definimos antes, entonces todo conjunto en esta familia de conjuntos es de la forma

$$A_p \cap B_q \ \ \text{con } p \in \{1,...,n\}, \ q \in \{1,...,m\}$$

y

$$(\forall p, q) \ A_p \cap B_q \subseteq A_p$$

Por lo tanto $\forall k \in I, \ \exists p \in \{1,...,n\}, \ C_k \subseteq A_p$, con lo que concluimos la demostración.

$\square$

P5) 1. Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que $A \subseteq E$ es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

2. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to B \mid f \text{ es función }\}$, es decir, es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$f \ R^* \ g \ \Leftrightarrow \ \forall \ a \in A, \ f(a) \ R \ g(a).$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos 2 elementos, entonces R^* es una relación de orden parcial.

Solución:

1. Tenemos que $f^{-1}(f(A)) = A$ y $f^{-1}(f(B)) = B$, veamos que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conjuntos estables:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(A \cup B)) &= f^{-1}(f(A) \cup f(B)) && () \\ &= f^{-1}(f(A)) \cup f^{-1}(f(B)) && () \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

es decir, $A \cup B$ es estable.

Veamos qué pasa con $A \cap B$: sabemos que $f^{-1}(f(A')) \supseteq A'$ para todo $A' \subseteq E$, por lo que basta con verificar que $f^{-1}(f(A \cap B)) \subseteq A \cap B$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(A \cap B)) &\subseteq f^{-1}(f(A) \cap f(B)) && () \\ &= f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)) && () \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

por lo tanto $A \cap B$ es estable.

2. Veamos que R^* es una relación de orden.

refleja: directo, pues R es refleja.

antisimétrica: sean f y g en $\mathcal{F}$, supongamos que $fR^*g \ \wedge \ gR^*f$, lo que es equivalente a

$$\forall a \in A, \quad f(a) \ R \ g(a) \ y \ \forall a \in A, \quad g(a) \ R \ f(a)$$

pero como R es antisimétrica, lo anterior implica que

$$\forall a \in A, \ g(a) = f(a)$$

y como f y g tienen el mismo dominio y recorrido, concluimos que $f = g$, y con esto, que R^* es antisimétrica.

transitiva: sean f, g, h en $\mathcal{F}$ tales que fR^*g y gR^*h, es decir

$$\forall a \in A, \quad f(a)\ R\ g(a) \quad y \quad \forall a \in A, \quad g(a)\ R\ h(a)$$

entonces, como R es transitiva, tenemos que

$$\forall a \in A, \quad f(a)\ R\ h(a)$$

es decir, fR^*h; con lo que concluimos que R^* es transitiva.

Supongamos que A y B tienen al menos 2 elementos y verifiquemos que entonces R^* es una relación de orden parcial. Tomemos $A = \{a, b\} \cup A'$ con $\{a, b\} \cap A' = \emptyset$ y $B = \{c, d\} \cup B'$ con $\{c, d\} \cap B' = \emptyset$ ($a \neq b$ y $c \neq d$).
Debemos buscar f y g en $\mathcal{F}$ tales que

$$f(a) \not R\ g(a) \quad \vee \quad f(b) \not R\ g(b).$$

Tomemos f y g tales que

$$f(a) = g(b) = c \ \wedge \ f(b) = g(a) = d,$$

entonces si fR^*g tendriamos, por la antisimetria de R, que $f(a) = f(b)$ lo que seria una contradicción.

$\square$

P6) Demuestre que el cardinal de los números racionales es igual al cardinal de los números racionales contenidos en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, demostrar que:

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \cap [0, 1]|$$

Solución: Como $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$ tenemos que $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{Q} \cap [0, 1]|$. Demostremos la otra desigualdad, para esto definamos la siguiente función:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ tal que } f(n) = \frac{1}{n}$$

Ahora, como f es una función inyectiva tenemos que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0, 1]|$. Pero sabemos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$, de donde obtenemos la desigualdad deseada.

$\square$

P7)
1. Muestre que el conjunto
$$A = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\} \text{ es numerable.}$$
2. Sean C, D conjuntos no vacios, con C finito y D numerable.
Sea

$$\mathcal{F}(C,D)=\{f:C\to D\mid f \text{ es función }\}.$$

Muestre que $\mathcal{F}(C,D)$ es numerable.

Indicación. Puede usar la siguiente propiedad: Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ es numerable.

Solución:

1. Sea $B = \{(0,n) | \ n \in \mathbb{N}\}$. Construyamos la siguiente biyección entre B y $\mathbb{N}$ (verificar como ejercicio que efectivamente es una biyecció):

$$\psi : B \to \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ \psi((0,n)) = n$$

Por lo tanto dado que ψ es una biyección y que $\mathbb{N}$ es numerable, B es numerable. Además, como $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \le n$ tenemos que $B \subseteq A$, luego $|B| = |\mathbb{N}| \le |A|$. Pero por definición, $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable (ya que $\mathbb{Z}$ lo es), luego tenemos que $|A| \le |\mathbb{N}|$. Asi, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$, es decir, A es numerable.

2. Como C es finito, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|C| = n$ y que $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Definamos:

$$G = D_1 \times D_2 \times ... \times D_n \quad \text{ donde } \forall i \in \{1, ..., n\},\ D_i = D$$

entonces por la indicación tenemos que G es numerable.
Definamos la siguiente función:

$$\varphi : \mathcal{F}(C,D) \to G \ \text{ tal que } \varphi(f) = (f(c_1), ..., f(c_n)).$$

Es directo que φ es una biyección (verificarlo), con lo que concluimos que $|\mathcal{F}(C,D)| = |G|$ y por lo tanto que $\mathcal{F}(C,D)$ es numerable.

$\square$

P8) Sea A un conjunto finito. Demuestre que:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Solución: Dado que A es finito podemos suponer que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Definamos la siguiente función:

$$f : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^{|A|},\ \text{ es decir} f : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^n$$

tal que dado $B \subseteq A \wedge i \in \{1, .., n\}$,

$$f(B)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in B \\ 0 & \text{si } a_i \notin B \end{cases}$$

Es decir, la componente i-ésima de $f(B)$ es uno si a_i está en B y es cero si no. Por lo tanto f es claramente una biyección, luego

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}|^|A| = 2^{|A|}$$

que es lo que queriamos demostrar.

$\square$

4.2. Problemas propuestos.

P1) Sea E un conjunto no vacio y $A \subseteq E$. Se define sobre $\mathcal{P}(E)$ la relación:

$$\mathcal{X} \; \mathcal{R} \; \mathcal{Y} \Longleftrightarrow \mathcal{X} \bigcap A = \mathcal{Y} \bigcap A.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

P2) Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longleftrightarrow a - c = \tfrac{2}{3}(b-d).$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

P3) Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n+m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.

1. Se define la relación R en $\mathbb{Z}$ por: $n \; R \; m \; \Leftrightarrow \; f(n) = f(m)$. Probar que R es una relación de equivalencia.
2. Probar que $f(0) = 0$, recuerde para ello que $0 + 0 = 0$.
3. Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Indicación: use que $m - m = 0$.
4. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P4) Sea H el conjunto de todos los hombres y M el conjunto de todas las mujeres. Se define $E \subseteq H \times M$ por:

$$E = \{(h,m) \in H \times M \mid h \text{ está casado con } m\}.$$

Es decir, E es el conjunto de todos los matrimonios.

1. Sea R_1 la relación definida en E por:

   $$(h_1,m_1) \; R_1 \; (h_2,m_2) \Longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{Algún miembro del matrimonio 1 es hermano(a) de algún} \\ \text{miembro del matrimonio 2.}\end{array}$$

   Estudie si la relación R_1 es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva (justifique adecuadamente su respuesta).
2. Se define en E la relación R_2 por:

   $$(h_1,m_1) \; R_2 \; (h_2,m_2) \Longleftrightarrow h_1 \text{ es hermano(a) de } h_2 \; .$$

Demuestre que R_2 es relación de equivalencia y describa la clase de equivalencia de un elemento cualquiera $(h, m) \in E$.

Nota: Considere que toda persona es hermana de ella misma.

P5) Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función.

1. Sea R una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de R que notamos $f^{-1}(R)$ por:

$$x \ f^{-1}(R) \ \bar{x} \ \Leftrightarrow \ f(x) \ R \ f(\bar{x}).$$

   a) Probar que $f^{-1}(R)$ es una relación de equivalencia en X.

   b) Probar que $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$ para cada $x \in X$.

2. Suponga ahora que R' es una relación de equivalencia en X y que f es sobreyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y \ f(R') \ y' \ \Leftrightarrow \ \exists \ x, x' \in X, \ f(x) = y \wedge f(x') = y$$

   a) Probar que si f es inyectiva entonces $f(R')$ es de equivalencia y además

$$R' = f^{-1}(f(R'))$$

   b) Construya un ejemplo donde f no sea inyectiva y $f(R')$ no sea de equivalencia. Qué propiedad es la que no se mantiene en general.

P6)

1. Pruebe que si A es un conjunto infinito no numerable y $B \subseteq A$ es numerable, entonces $A \setminus B$ es infinito no numerable.

2. Sea $\mathcal{S} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \{0, ..., 9\}\}$, es decir el conjunto de las sucesiones de digitos, y $\mathcal{S}_0 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} | \ \exists i_0 \in \mathbb{N} \ \forall \ i \geq i_0 \ \ a_i = 0\}$, es decir las sucesiones en $\mathcal{S}$ que son nulas a partir de un momento.

   a) Pruebe que $\mathcal{S}_0$ es numerable.

   b) Pruebe que $\mathcal{S}$ es infinito no numerable.

Capítulo 5

Principio de inducción, Recurrencia

5.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Sea $E \neq \emptyset$ y $\ll$ un orden total sobre E. Probar por inducción que si A es un subconjunto no vacio de E, entonces $\exists\ a \in A,\ \forall b \in A, \quad a \ll b$.

2. Probar por inducción que $\forall\ n \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

3. Probar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

Solución:

1. Como A es finito, suponemos que $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y resolveremos el problema usando inducción sobre el número de elementos de A, es decir sobre n.

   a) $\underline{n = 1}$: $A = \{a_1\}$
   Como $\ll$ es un orden, entonces es refleja y por lo tanto $a_1 \ll a_1$, con lo que se cumple lo pedido.

   b) HI: suponemos la hipótesis cierta para n, es decir que para $A = \{a_1, ...a_n\} \subseteq E$ se cumple que

   $$\exists\ a \in A,\ \forall b \in A, \quad a \ll b$$

   c) Demostremos que es cierto para $n + 1$:
   Tenemos que $A = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, ..., a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$. Sea $B = \{a_1, ...a_n\}$, entonces le podemos aplicar la hipótesis de inducción, pues $B \subseteq E$ y tiene n elementos, por lo tanto

   $$\exists a \in B,\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ a \ll a_i.$$

   Ahora, como $\ll$ es un orden total en E y $a, a_{n+1} \in E$ tenemos que

   $$a \ll a_{n+1} \quad \vee \quad a_{n+1} \ll a$$

- si $a \ll a_{n+1} \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n, n+1\},\ a \ll a_i$.

- si $a_{n+1} \ll a \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n, n+1\},\ a_{n+1} \ll a_i$ (por transitividad de $\ll$).

Por lo tanto, en cualquier caso, tenemos un elemento de A que cumple con lo pedido (recordar que $a \in B \subseteq A$), con lo que hemos probado que la hipótesis de inducción se cumple para $n+1$.

2. *a*) <u>$n = 1$:</u>

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^2 + \frac{(-1)^3}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto se cumple para $n = 1$.

b) <u>HI:</u> lo suponemos cierto para n, es decir suponemos que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

c) <u>Demostrémoslo para $n+1$:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \qquad (HI) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2(n+1)} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

con lo que lo hemos demostrado para $n+1$.

3. *a*) $\underline{n=0}$:

   $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^1 + 2^2 = 7$, por lo que es cierto para $n = 0$

   b) HI: lo suponemos cierto para n, es decir

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \quad \text{para cierto } k \in \mathbb{N}.$$

c) <u>Demostrémoslo para $n+1$:</u>

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\
&= 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2^1 \cdot 2^{n+2} \\
&= (8+1) \cdot 3^{2n+1} + (1+1) \cdot 2^{n+2} \\
&= 3^{2n+1} + 2^{n+2} + 8 \cdot 3^{2n+1} + 2^{n+2} \\
&= 7k + (7+1) \cdot 3^{2n+1} + 2^{n+2} && (HI) \\
&= 7k + 7 \cdot 3^{2n+1} + 3^{2n+1} + 2^{n+2} \\
&= 7k + 7 \cdot 3^{2n+1} + 7k && (HI) \\
&= 7(2k + 3^{2n+1}) \\
&= 7\bar{k} && (\bar{k} = 2k + 3^{2n+1} \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

con lo que concluimos que $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2}$ es divisible por 7.

$\square$

P2) 1. Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

2. Probar por inducción que $\forall\, n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^k$$

Solución:

1.

$$\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

$$= \frac{(n+1)!(n+1-k)}{(n-k)!(n+1-k)(k+1)!}+\frac{(n+1)!(k+1)}{(n+1-k)!k!(k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!(n+2)}{(n+1-k)!(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n+1-k)!(k+1)!}$$

$$= \binom{n+2}{k+1}$$

2. *a*) <u>$n=1$:</u>

$$\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{1}(1+x)^k=1+1+x=2+x$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k=\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k+1}x^k=\binom{2}{1}+\binom{2}{2}x=2+x$$

es decir, se cumple para $n=1$.

b) <u>HI:</u> lo suponemos cierto para n.

c) <u>Demostrémoslo para $n+1$:</u>

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(1+x)^k &= \sum_{k=0}^{n}(1+x)^k + (1+x)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j \qquad (HI\ y\ Teo.\ Binomio) \\
&= \sum_{k=0}^{n}[\binom{n+2}{k+1} - \binom{n+1}{k}]x^k + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j \qquad (a) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}x^j + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}x^k \qquad (\binom{n+2}{n+2} = \binom{n+1}{n+1} = 1)
\end{aligned}
$$

con lo que concluimos la demostración.

□

P3) 1. La sucesión infinita de números reales positivos $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ es tal que

$$2 = a_0\sqrt{2}, \quad a_0 = a_1^2 - a_0, \quad a_1 = a_2^2 - a_1, \quad a_2 = a_3^2 - a_2, \ ...etc.$$

   a) Definir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por recurrencia.

   b) Usar la definición anterior para probar por inducción que

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq \sqrt{2}$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, ..., n\}$ se definen enteros $a(n,k)$ por la recurencia:

   $a(0,0) = 1$

$a(n,0) = 2 \cdot a(n-1,0) \quad$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$a(n,n) = a(n-1,n-1) \quad$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$a(n,k) = a(n-1,k-1) + 2 \cdot a(n-1,k) \quad$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $k \in \{1,...,n-1\}$

Probar por inducción que $a(n,k) = \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

Solución:

1. *a*) $2 = a_0\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \sqrt{2}$

   $a_0 = a_1^2 - a_0 \quad \Rightarrow \quad 2a_0 = a_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{2a_0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}$

   $a_1 = a_2^2 - a_1 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 = a_2^2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \sqrt{2a_1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

   Definimos por recurrencia

   $$a_0 = \sqrt{2}$$

   $$\forall n \geq 1,\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

   b) Probemos por inducción que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq \sqrt{2}$.

   1) <u>$n = 0$:</u>

      $a_0 = \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$

   2) <u>HI:</u> suponemos que $a_n \geq \sqrt{2}$

   3) <u>Demostrémoslo para $n+1$:</u>
      Notemos primero lo siguiente:

      $$\text{por HI:}\ a_n \geq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2a_n \geq 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2a_n} \geq \sqrt{2\sqrt{2}} \qquad (1)$$

      $$\sqrt{2} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \qquad (2)$$

      Entonces

      $$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n} \\ &\geq \sqrt{2\sqrt{2}} \qquad (\textit{por } 1) \\ &\geq \sqrt{2} \qquad\quad (\textit{por } 2) \end{aligned}$$

2. Probemos por inducción que $a(n,k) = \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

a) $\underline{n = 0:}$
Como $k \in \{0, ..., n\}, \quad n = 0 \Rightarrow k = 0$, es decir sólo debemos probarlo para $k = 0$:

$a(0,0) = 1$

$\binom{n}{k}2^{n-k} = \binom{0}{0}2^{0-0} = 1$

b) HI: $\forall\ k \in \{0, ..., n\} \quad a(n,k) = \binom{n}{k}2^{n-k}$

c) Demostrémoslo para $n + 1$:

- para $k = 0$:

$$
\begin{aligned}
a(n+1,0) &= 2a(n,0) && (def.)\\
&= 2\binom{n}{0}2^{n-0} && (HI)\\
&= \binom{n}{0}2^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}2^{n+1-0}
\end{aligned}
$$

- para $k = n + 1$:

$$
\begin{aligned}
a(n+1,n+1) &= a(n,n) && (def.)\\
&= \binom{n}{n}2^{n-n} && (HI)\\
&= \binom{n+1}{n+1}2^{(n+1)-(n+1)}
\end{aligned}
$$

- para $k \in \{1, ..., n\}$:

$$
\begin{aligned}
a(n+1,k) &= a(n,k-1) + 2a(n,k) && (def.)\\
&= \binom{n}{k-1}2^{n-(k-1)} + 2\binom{n}{k}2^{n-k} && (HI)\\
&= 2^{n-k+1}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]\\
&= 2^{n+1-k}\binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

□

P4) Calcular las siguientes sumatorias

1. $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ij$$

2. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \cdot \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

3. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \cdot i$$

4. para $n \geq 1, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq y$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} \cdot y^i$$

Solución:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ij &= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{m} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{m(m+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \cdot \frac{i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \left(\frac{-1}{i+1} + \frac{2}{i+2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-2^{i+1}}{i+1} + \frac{2 \cdot 2^{i+1}}{i+2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2^{i+2}}{i+2} - \frac{2^{i+1}}{i+1} \right) \\
&= \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^2}{2} \qquad \textit{(telescópica)} \\
&= \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \cdot i = (-1)^1 1 + (-1)^2 2 + (-1)^3 3 + ... + (-1)^{2n} 2n,$

   es decir, lo que estamos haciendo es sumar los pares entre 1 y 2n, y restarle los impares del mismo intervalo, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \cdot i &= \sum_{i=1, i\ par}^{2n} i - \sum_{i=1, i\ impar}^{2n} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2j - \sum_{j=1}^{n} (2j-1) \qquad \textit{(cambio de variables)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2j - \sum_{j=1}^{n} 2j + \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1}x^{-i}y^i \\
&= x^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} x^{-i}y^i \\
&= x^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{y}{x}\right)^i \\
&= x^{n-1}\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^n}{1-\frac{y}{x}} \\
&= \frac{x^n-y^n}{x-y}
\end{aligned}$$

$\square$

P5) Sin usar inducción:

1. Calcular
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$
2. Calcular la siguiente sumatoria
$$\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$$
3. Probar que para todo $n \geq 1$ se tiene que
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} = 2^{2n-1}$$

Solución: Esta pregunta es para que vean el uso de algunas técnicas.

1.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad (telescópica) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

2. Sabemos que $(k+1)^2 = k^2+2k+1 \quad \Rightarrow \quad k^2+1 = (k+1)^2 - 2k$, entonces:

$$\begin{aligned}(k^2+1)k! &= ((k+1)^2-2k)k!\\ &= k!(k+1)^2-2kk!\\ &= (k+1)(k+1)k!-2kk!\\ &= (k+1)(k+1)!-kk!-kk!\end{aligned}$$

Además:

$$kk! = kk! + k! - k! = (k+1)k! - k(k-1)!$$

Por lo tanto

$$(k^2+1)k! = (k+1)(k+1)! - kk! - ((k+1)k! - k(k-1)!)$$

Asi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! &= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)(k+1)!-kk!] - \sum_{k=1}^{n}[(k+1)k!-k(k-1)!]\\ &= [(n+1)(n+1)!] - 1!1! - [(n+1)n! - 1\cdot 0!] \qquad (\textit{telescópica})\\ &= (n+1)(n+1)! - 1 - (n+1)! + 1\\ &= (n+1)!(n+1-1)\\ &= n(n+1)!\end{aligned}$$

3. Por el Teorema del Binomio tenemos que

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n} &= \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(1)^{2n-i}x^i + \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(1)^{2n-i}(-x)^i\\ &= \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(1)^{2n-i}x^i(1+(-1)^i)\\ &= \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^i(1+(-1)^i)\end{aligned}$$

Pero

$$(1+(-1)^i) = \begin{cases} 0 & \text{si i es impar}\\ 2 & \text{si i es par}\end{cases}$$

Ahora, tomando $x=1$ en lo que acabamos de hacer, nos queda que

$$2^{2n} = \sum_{i=0(i\ par)}^{2n}\binom{2n}{i}2$$

Luego

$$\begin{aligned} 2^{2n-1} &= \sum_{i=0 (i \ par)}^{2n} \binom{2n}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} \end{aligned}$$

□

5.2. Problemas propuestos.

P1) Probar por inducción que:

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}, 6$ divide a $n^3 + 5n$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = \alpha n$, y determine el valor de la constante α.
3. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, el producto de n números naturales mayores estrictos que uno y no necesariamente consecutivos es mayor estricto que n.

P2)

1. Probar que dado $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n} C_{i+j-1}^{j} = C_{n+j}^{j+1}$.
2. Concluya de la parte (i) que

$$\sum_{n_2=1}^{n_1} \sum_{n_3=1}^{n_2} ..... \sum_{n_i=1}^{n_{i-1}} ..... \sum_{n_k=1}^{n_{k-1}} 1 = C_{n_1+k-2}^{k-1}$$

P3)

1. Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1,\ \ 0 \leq k \leq n$, se tiene que $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ y deduzca que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

2. Calcular las sumatorias siguientes.

   a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \log(1 + \frac{1}{k})$, donde $n \leq m$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!\,(n-k)!}$, donde $n \geq 1$.

3. Sea $S = 1+(1+b)q+(1+b+b^2)q^2+.....+(1+b+...+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

4. a) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + ... + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(p+1)} \frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

b) Calcular para $m \geq 1$,

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

P4) Calcular las sumatorias siguientes:

1. $$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

4. $$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_n^{p-k}$$

Capítulo 6

Estructuras Algebraicas

6.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Para la ley de composición interna (lci) en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bd)$$

estudiar conmutatividad, asociatividad y existencia de: neutro, inversos, elementos absorbentes y elementos idempotentes.

2. Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa con neutro $e \in A$ y tal que

$$\forall\, a \in A, \quad a * a = e$$

Demostrar que * es conmutativa.

Solución:

1. Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$ elementos cualquiera,

conmutatividad:

$$\begin{aligned}(a,b) * (c,d) &= (ac, bd)\\ &= (ca, db)\\ &= (c,d) * (a,b)\end{aligned}$$

$\Rightarrow *$ conmuta.

asociatividad:

$$\begin{aligned}((a,b)*(c,d))*(e,f) &= (ac,bd)*(e,f)\\ &= ((ac)e,(bd)f)\\ &= (a(ce),b(df))\\ &= (a,b)*(ce,df)\\ &= (a,b)*((c,d)*(e,f))\end{aligned}$$

$\Rightarrow *$ es asociativa.

existencia de neutro:
Queremos encontrar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)*(x,y) = (a,b)\ \wedge\ (x,y)*(a,b) = (a,b)$$

pero como $*$ conmuta, basta con probar sólo una de las igualdades anteriores. Veamos:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)*(x,y) = (a,b) &\Leftrightarrow \forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (ax,by) = (a,b)\\ &\Leftrightarrow \forall\ a \in \mathbb{R},\ ax = a \quad \in \mathbb{R}\ \wedge\ \forall\ b \in \mathbb{R},\ by = b\\ &\Leftrightarrow x = y = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto el elemento neutro es $(1,1)$.

existencia de inversos:
Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ queremos ver si existe $(\bar{a},\bar{b})$, tal que $(a,b)*(\bar{a},\bar{b}) = (1,1)$ (recordar que $*$ conmuta)

$$\begin{aligned}(a,b)*(\bar{a},\bar{b}) = (1,1) &\Leftrightarrow (a\bar{a},b\bar{b}) = (1,1)\\ &\Leftrightarrow a\bar{a} = 1\ \wedge\ b\bar{b} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto (a,b) tendrá inverso si y sólo si a y b son distintos de cero y éste será (a^{-1},b^{-1}), donde x^{-1} es el inverso multiplicativo de x en $\mathbb{R}$.

existencia de elemento absorbente:
Buscamos un elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)*(x,y) = (x,y)$

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b)*(x,y) = (x,y) &\Leftrightarrow \forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ (ax,by) = (x,y)\\ &\Leftrightarrow \forall\ a \in \mathbb{R},\ \ ax = x\ \ \wedge\ \ \forall\ b \in \mathbb{R},\ \ by = y\\ &\Leftrightarrow x = y = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $(0,0)$ es el único elemnto absorbente.

existencia de elemento idempotente:
Buscamos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(a,b) * (a,b) = (a,b)$

$$\begin{aligned}
(a,b) * (a,b) = (a,b) \quad & \Leftrightarrow (a^2, b^2) = (a,b) \\
& \Leftrightarrow a^2 = a \ \wedge \ b^2 = b \\
& \Leftrightarrow a \in \{0,1\} \ \wedge \ b \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto los elementos idempotentes son $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

2. Tenemos que probar que $(\forall\ a, b \in A)$, $a * b = b * a$. Sea $z = a * b$, luego

$$\begin{aligned} a * z &= a * (a * b) \\ &= (a * a) * b \qquad (* \ asoc.) \\ &= e * b \qquad (hip\acute{o}tesis) \end{aligned}$$

entonces $(a * z) * z = (e * b) * z$, pero

$$\begin{aligned} (a * z) * z = (e * b) * z &\Rightarrow a * (z * z) = b * z \qquad (* \ asoc.) \\ &\Rightarrow a * e = b * z \qquad (hip\acute{o}tesis) \\ &\Rightarrow a = b * z \\ &\Rightarrow b * a = b * (b * z) \\ &\Rightarrow b * a = e * z \\ &\Rightarrow b * a = z \\ &\Rightarrow b * a = a * b \end{aligned}$$

es decir, $*$ conmuta.

$\square$

P2) Sea U un conjunto no vacio cualquiera y sea $\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ el conjunto de las funciones de U en $\mathbb{Z}_2$. A todo subconjunto $X \subseteq U$ le asociamos la función $\mathbb{1}_X : U \to \mathbb{Z}_2$ tal que

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin X \\ 1 & si\ x \in X \end{cases}$$

que se denomina la indicatriz del conjunto X.

1. Probar que si $f \in \mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$, entonces existe $X \subseteq U$ tal que $f = \mathbb{1}_X$.
2. Sobre $\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ se definen las siguientes operaciones:

$$(\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) +_2 \mathbb{1}_B(x)$$
$$(\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x)$$

donde $A, B \subseteq U$ y $x \in U$.

Demuestre que $(\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2), \oplus, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Solución:

1. Dado $f \in \mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$, como $Rec(f)=\mathbb{Z}_2 \;\Rightarrow \forall \;\; u \in U,\; f(u)=0 \vee f(u)=1$. Definimos $X \subseteq U$ de la siguiente manera:

$$x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=1 \text{ (es decir, } X = f^{-1}(1)).$$

   Por lo tanto

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \notin X \Leftrightarrow f(x)=0 \\ 1 & \textit{si } x \in X \Leftrightarrow f(x)=1 \end{cases}$$

   de aqui que $(\forall x \in U), \mathbb{1}_X(x) = f(x)$, con lo que $\mathbb{1}_X = f$.

2. Como vimos en la parte anterior que toda función en $\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$ se puede representar por una indicatriz (y toda indicatriz está en $\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$), en lo que sigue sólo trabajaremos con indicatrices. Veamos que $(\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2),\oplus,\bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

   Primero notemos lo siguiente: cuando evaluamos las indicatrices y operamos con $+_2$ y $\cdot_2$, en realidad estamos trabajando en $(\mathbb{Z}_2,+_2,\cdot_2)$ que es un anillo, por lo tanto podemos ocupar sus propiedades. Cuando hagamos uso de estas propiedades habrá una nota al margen que dirá $(\mathbb{Z}_2,+_2,\cdot_2)$ *anillo*.
   Sean $A,B,C \subseteq U$.

   pdq $\bullet$ distribuye con respecto a $\oplus$:
   Sea x en U un elemento cualquiera.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_A \bullet (\mathbb{1}_B \oplus \mathbb{1}_C)(x) \quad &= \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 (\mathbb{1}_B \oplus \mathbb{1}_C)(x) \\
&= \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 (\mathbb{1}_B(x) +_2 \mathbb{1}_C(x)) \\
&= (\mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x)) +_2 (\mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_C(x)) \quad ((\mathbb{Z}_2,+_2,\cdot_2) \textit{ anillo}) \\
&= (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) +_2 (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_C)(x) \\
&= (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B) \oplus (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_C)(x)
\end{aligned}$$

   Por lo tanto $\bullet$ distribuye con respecto a $\oplus$, pues la igualdad se cumple en cada x y tienen mismo dominio y recorrido.

   pdq $(\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2),\oplus)$ es grupo abeliano:

   a) <u>pdq $\oplus$ es asociativa:</u> Sea x en U cualquiera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_A \oplus (\mathbb{1}_B \oplus \mathbb{1}_C)(x) &= \mathbb{1}_A(x) +_2 (\mathbb{1}_B \oplus \mathbb{1}_C)(x) \\
&= \mathbb{1}_A(x) +_2 (\mathbb{1}_B(x) +_2 \mathbb{1}_C(x)) \\
&= (\mathbb{1}_A(x) +_2 \mathbb{1}_B(x)) +_2 \mathbb{1}_C(x) \quad ((\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)\ \textit{anillo}) \\
&= (\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B)(x) +_2 \mathbb{1}_C(x) \\
&= (\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B) \oplus \mathbb{1}_C(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\oplus$ es asociativa, pues la igualdad se cumple en cada x y tienen mismo dominio y recorrido.

b) pdq $\oplus$ conmuta: Sea x en U un elemento cualquiera,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B)(x) &= \mathbb{1}_A(x) +_2 \mathbb{1}_B(x) \\
&= \mathbb{1}_B(x) +_2 \mathbb{1}_A(x) \quad ((\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)\ \textit{anillo}) \\
&= (\mathbb{1}_B \oplus \mathbb{1}_A)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\oplus$ conmuta, pues la igualdad se cumple en cada x y tienen mismo dominio y recorrido.

c) pdq $\oplus$ tiene neutro: Queremos encontrar $X \subseteq U$ tal que $\forall\ A \subseteq U,\ \forall u \in U, \mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_A(u)$ (recordar, de aqui en adelante, que $\oplus$ conmuta), es decir tal que:

$$\forall\ A \subseteq U, \forall u \in U,\ \mathbb{1}_A(u) +_2 \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_A(u)$$

pero es directo que $X = \emptyset$ satisface lo anterior (puesto que $\forall u \in U,\ \mathbb{1}_\emptyset(x) = 0)$), por lo tanto el neutro para $\oplus$ es $\mathbb{1}_\emptyset$.

d) pdq todo elemento de $\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2)$ tiene inverso para $\oplus$: Dado $A \subseteq U$, buscamos $X \subseteq U$ tal que $(\forall\ u \in U)$,

$$\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_\emptyset(u) \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(u) +_2 \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_\emptyset(u)$$

Notemos que:

$$\mathbb{1}_A(u) +_2 \mathbb{1}_A(u) = \begin{cases} 0 +_2 0 = 0 & si\ u \notin A \\ 1 +_2 1 = 0 & si\ u \in A \end{cases}$$

por lo tanto $\mathbb{1}_A +_2 \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_\emptyset$. Asi, dado $A \subseteq U$ el inverso de $\mathbb{1}_A$ es él mismo.

En conclusión, $(\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2), \oplus)$ es grupo abeliano.

pdq $\bullet$ es asociativa: Sea x un elemento en U cualquiera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_A \bullet (\mathbb{1}_B \bullet \mathbb{1}_C)(x) &= \mathbb{1}A(x) \cdot_2 (\mathbb{1}_B \bullet \mathbb{1}_C)(x) \\
&= \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 (\mathbb{1}_B(x) \cdot_2 \mathbb{1}_C(x)) \\
&= (\mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x)) \cdot_2 \mathbb{1}_C(x) \quad ((\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \textit{ anillo}) \\
&= (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) \cdot_2 \mathbb{1}_C(x) \\
&= (\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B) \bullet \mathbb{1}_C(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bullet$ es asociativa, pues la igualdad se cumple en cada x y tienen mismo dominio y recorrido.

pdq $\bullet$ conmuta: Sea x un elemento en U cualquiera,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) &= \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x) \\
&= \mathbb{1}_B(x) \cdot_2 \mathbb{1}_A(x) \quad ((\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \textit{ anillo}) \\
&= (\mathbb{1}_B \bullet \mathbb{1}_A)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bullet$ es conmutativa, pues la igualdad se cumple en cada x y tienen mismo dominio y recorrido.

pdq $\bullet$ tiene neutro:
Buscamos $X \subseteq U$ tal que $\forall\ A \subseteq U,\ \forall\ u \in U, \mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_A(u)$ ($\bullet$ conmuta), es decir tal que

$$\forall\ A \subseteq U,\ \forall\ u \in U\ \ \mathbb{1}_A(u) \cdot_2 \mathbb{1}_X(u) = \mathbb{1}_A(u)$$

Notamos directamente que basta tomar $X = U$, es decir el neutro de $\bullet$ es $\mathbb{1}_U$.

Asi, finalmente, tenemos que $(\mathcal{Y}(U, \mathbb{Z}_2), \oplus, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

$\square$

P3) 1. Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con elemento neutro $e \in A$ y asociativa. Se define el conjunto

$$B = \{x \in A |\ \exists\ y \in A, \quad x * y = y * x = e\}$$

es decir, $x \in B$ si y sólo si x tiene inverso para $*$ en A. Probar que $(B, *)$ es un grupo.

2. Considere el conjunto

$$\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean

$$A_1 = \{1, 12\},\ A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\},\ A_3 = \{1, 5, 8, 12\}$$

Indique cuál de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cuál no.

Solución:

1. Para ver que $(B, *)$ es un grupo, primero tenemos que verificar que $*$ es una l.c.i. : sean $a, b \in B$, entonces existen $a', b' \in A$ tales que

$$a * a' = a' * a = e \quad \wedge \quad b * b' = b' * b = e$$

Veamos que $a*b$ tiene inverso para $*$ en A: proponemos $b' * a'$ ($\in A$ pues $*$ es por hipótesis una l.c.i. en A). Verifiquémoslo

$$\begin{aligned}(a * b) * (b' * a') &= (a * (b * b') * a') && (* \; asoc.)\\ &= a * e * a' && (hipótesis)\\ &= a * a' \\ &= e && (hipótesis)\end{aligned}$$

Que $(b' * a') * (a * b) = e$ es análoga. Por lo tanto, dados $a, b \in B$, $(a * b)$ tiene inverso en A, y éste es $(b' * a')$ (con a' y b' como los definimos antes).
Verifiquemos ahora las propiedades de grupo:

pdq $*$ es asociativa:
Como $*$ es asociativa en A, entonces como $B \subseteq A$ tenemos que $*$ es asociativa en B.

pdq $*$ tiene neutro en B:
También es directo, pues $e*e = e$, por lo que $e \in B$ y como e es neutro en A, también lo es en B.

pdq todo elemento de B tiene inverso para $*$:
Sea $b \in B$, entonces existe $b' \in A$ tal que $b * b' = b' * b = e$. Luego, $b' \in B$ por definición de B y también, por definición (de inverso), b' es inverso de b.

Por lo tanto $(B, *)$ es un grupo.

2. Sea $i \in \{1, 2, 3\}$, si A_i es un grupo, entonces es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot_{13})$ que es un grupo abeliano finito, por lo tanto, por el Teorema de Lagrange, deberiamos tener que $|A_i|$ divide a $|\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}| = 12$ (notar que el teorema de Lagrange sólo pide que el grupo sea finito, si no fuera abeliano igual podriamos ocuparlo).
Por lo tanto, como $|A_2| = 7$, A_2 queda descartado ($|A_1| = 2$ y $|A_3| = 4$, por lo que no podemos decir nada aún).

Veamos A_1:
Como $1 \in A_1$ y 1 es el neutro para $\cdot_{13}$, entonces $(A_1, *)$ tiene neutro. Además, como $\cdot_{13}$ es asociativa en $\mathbb{Z}_{13}$ y $A_1 \subseteq \mathbb{Z}_{13}$, $\cdot_{13}$ sigue siendo asociativa en A_1.

Asi, sólo faltaria verificar que $\cdot_{13}$ es cerrada en A_1 y la existencia de inverso para todos los elementos de A_1:

$$1 \cdot_{13} 1 = 1 \in A_1 \quad \wedge \quad 12 \cdot_{13} 1 = 12 \in A_1 \quad \wedge \quad 1 \cdot_{13} 12 = 12 \in A_1 \quad \wedge \quad 12 \cdot_{13} 12 = 1 \in A_1$$

Por lo tanto $\cdot_{13}$ es cerrada en A_1. Veamos los inversos:

$$12 \cdot_{13} 12 = 1 \quad \wedge \quad 1 \cdot_{13} 1 = 1 \ \rightarrow 12^{-1} \ \wedge \ 1^{-1} = 1$$

Asi, $(A_1, \cdot_{13})$ es un grupo.

<u>Veamos A_3:</u>
Análogamente al caso anterior, sólo falta verificar que $\cdot_{13}$ es cerrada en A_3 y la existencia de inversos: veamos la cerradura en la siguiente tabla

$\cdot_{13}$	1	5	8	12
1	1	5	8	12
5	5	12	1	8
8	8	1	12	5
12	12	8	5	1

Con respecto a los inversos, ya vimos que los inversos de 1 y 12 eran ellos mismos, nos faltan los inversos de 5 y 8, pero de la tabla anterior notamos que el inverso de 5 es 8 y el de 8 es 5.
Por lo tanto $(A_3, \cdot_{13})$ es un grupo.

$\square$

P4) Sea $(G, \otimes)$ un grupo y $(H, \otimes)$ un subgrupo de $(G, \otimes)$. Se define para $a \in G$ y $b \in G$:

$$a \otimes H = \{a \otimes h | h \in H\}$$

Probar que:

1. Si $g \in H \Longrightarrow g \otimes H = H$.
2. Si $a \otimes H \cap b \otimes H \neq \emptyset \Longrightarrow a \otimes H = b \otimes H$.

Solución:

1. Sea $g \in H$, pdq $g \otimes H = H$

$(\subseteq)$
Sea $b \in g \otimes H \quad \Rightarrow \ b = g \otimes h \ \ \textit{con } h \in H$

$\Rightarrow b \in H \qquad$ (*pues como H es subgrupo $\otimes$ es cerrada en $H \times H$*)

$\Rightarrow g \otimes H \subseteq H$

($\supseteq$)
Sea $h \in H$ tenemos que buscar $\bar{h} \in H$ tal que $h = g \otimes \bar{h}$.
Como H es subgrupo, exite $g^{-1} \in H$ inverso de g, tomemos $\bar{h} = g^{-1} \otimes h$ ($\in H$), veamos que cumple con lo que queremos:

$$\begin{aligned} g \otimes \bar{h} &= g \otimes (g^{-1} \otimes h) \\ &= (g \otimes g^{-1}) \otimes h \quad (\textit{pues } H \textit{ es subgrupo}) \\ &= h \end{aligned}$$

que es lo que buscábamos, luego $H \subseteq g \otimes H$.

2. Suponemos que $a \otimes H \cap b \otimes H \neq \emptyset$ y veamos que $a \otimes H = b \otimes H$.
Por hipótesis tenemos que existe $f \in a \otimes H \cap b \otimes H$, entonces

$$f = a \otimes h \quad \wedge \quad f = b \otimes \bar{h}$$

para ciertos $h, \bar{h} \in H$, es decir existen $h, \bar{h} \in H$ tales que $a \otimes h = b \otimes \bar{h}$.
($\subseteq$)
Sea $g \in a \otimes H$, luego $g = a \otimes \bar{g}$ para cierto $\bar{g} \in H$.
Sean $h^{-1} \in H$ el inverso de h para $\otimes$ (existe pues H es subgrupo) y e el neutro de G (que es el mismo de H), entonces:

$$\begin{aligned} g &= a \otimes e \otimes \bar{g} \\ &= a \otimes (h \otimes h^{-1}) \otimes \bar{g} \\ &= (a \otimes h) \otimes (h^{-1} \otimes \bar{g}) \\ &= (b \otimes \bar{h}) \otimes (h^{-1} \otimes \bar{g}) \end{aligned}$$

como H es un subgrupo y $\bar{h}, h^{-1}, \bar{g} \in H$ tenemos que $m = \bar{h} \otimes h^{-1} \otimes \bar{g} \in H$. Asi, tenemos que

$$g = b \otimes m \quad con\ m \in H \ \Rightarrow \ g \in b \otimes H$$

con lo que concluimos esta inclusión.
($\supseteq$)
Es análoga a la anterior (usando $\bar{h}^{-1} \otimes \bar{h} = e \in H$).

□

P5) 1. Sea $f : (\mathbb{Z}_m, +_m) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera, donde $m \geq 1$. Demuestre que f es la función constante 0.

2. Sea $(\mathcal{G}, *)$ un grupo y $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in \mathcal{G}$ (recordar que g^{-1} es el inverso de g para la operación $*$). Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo } \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ es un grupo Abeliano.}$$

Solución:

1. Como f es un homomorfismo, tenemos que

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}_m, \quad f(a +_m b) = f(a) + f(b)$$

entonces para $c = 1 +_m 1 .... +_m 1$ (m veces) se tiene $f(c) = mf(1)$. Pero $c \equiv_m 0$, por lo tanto $f(c) = f(0)$, con lo que obtenemos que

$$f(0) = mf(1).$$

Pero como $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ es una estructura algebraica y f es un morfismo de $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ en $(\mathbb{Z}, +)$, tenemos que f del neutro de $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ es igual a f del neutro de $(\mathbb{Z}, +)$, y como el neutro de ambos es al cero, tenemos que

$$0 = mf(1).$$

Ahora, como $m \neq 0$, lo anterior implica que $f(1) = 0$.
Además, cualquier elemento de $\mathbb{Z}_m$ se puede escribir como una suma finita de unos, por lo tanto su imagen por f será de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(1)$ para algún $n < m$, pero esta sumatoria es siempre cero (ya que $f(1)$ es cero).
Por lo tanto tenemos que f evaluado en cualquier elemento de $\mathbb{Z}_m$ es cero, de donde concluimos que $f \equiv 0$.

2. $(\Rightarrow)$
Como f es un isomorfismo, tenemos que

$$\forall\ g, h \in \mathcal{G}, \quad f(g * h) = f(g) * f(h) (\Leftrightarrow (g * h)^{-1} = g^{-1} * h^{-1}).$$

$\mathcal{G}$ es un grupo,entonces para ver que es grupo abeliano sólo falta varificar que $*$ conmuta: sean $a, b \in \mathcal{G}$ y e el neutro para $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
a * b &= (a * b) * e \\
&= (a * b) * (b * a)^{-1} * (b * a) \\
&= (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) * (b * a) \\
&= a * e * a^{-1} * (b * a) \qquad\qquad (\mathcal{G}\ es\ grupo) \\
&= a * a^{-1} * (b * a) \\
&= b * a
\end{aligned}$$

Por lo tanto $*$ conmuta.

(⇐)
Suponemos que $(\mathcal{G},*)$ es grupo abeliano, veamos que f es un isomorfismo

f homomorfismo:

$$\begin{aligned} f(a*b) &= (a*b)^{-1} \\ &= b^{-1}*a^{-1} \qquad (\mathcal{G} \textit{ es grupo}) \\ &= a^{-1}*b^{-1} \qquad (* \textit{ conmuta}) \\ &= f(a)*f(b) \end{aligned}$$

Por lo tanto f es un homomorfismo.

f biyectiva:

·inyectiva: sean $a,b \in \mathcal{G}$ tal que $f(a)=f(b)$, es decir $a^{-1}=b^{-1}$. Pero como $\mathcal{G}$ es grupo, a es el inverso de a^{-1} y b es el inverso de b^{-1}, entonces como los inversos son únicos y $a^{-1}=b^{-1}$, tenemos que $a=b$.

· sobreyectiva: sea $a \in \mathcal{G}$, veamos que existe $b \in \mathcal{G}$ tal que $f(b)=a$, es decir tal que $b^{-1}=a$. Como $\mathcal{G}$ es grupo $(a^{-1})^{-1}=a$, por lo tanto basta tomar $b=a^{-1}$.

Asi, f es un homomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo.

□

6.2. Problemas propuestos.

P1) Sea $(E,*)$ una estructura algebraica y sea R una relación de equivalencia en E que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall\, x_1,x_2,y_1,y_2 \ \in E) \qquad x_1Rx_2 \wedge y_1Ry_2 \Rightarrow (x_1*y_1)R(x_2*y_2).$$

Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ en el conjunto cuociente E/R mediante:

$$[x]\otimes[y]=[x*y].$$

1. Justifique que $\otimes$ está bien definida, es decir pruebe que la clase de $x*y$ no depende de los representantes de [x] y de [y] que se escojan.
2. Muestre que si $(E,*)$ es un grupo, entonces $(E/R,\otimes)$ también es un grupo.

P2) 1. Sea $f : (A, *) \to (B, \Delta)$ un morfismo.

   a) Probar que Δ es una ley de composición interna en $f(A)$.

   b) Probar que $(f(A), \Delta)$ es un grupo si $(A, *)$ es un grupo.

2. Considere la operación definida en $\mathbb{Z}$ por $n * m = n + m - 1$. Pruebe que $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son isomorfos.

P3) 1. Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.

2. Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n = g * ... * g$ (n-veces) $= e$ (el neutro de G). Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0$ en cada $g \in G$.

P4) Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

1. Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es una anillo conmutativo con unidad.
2. Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.
3. Se dice que $(R_\triangle, +_\triangle, \cdot_\triangle)$ y $(R_\diamond, +_\diamond, \cdot_\diamond)$ son isomorfos si existe $\varphi : R_\triangle \to R_\diamond$ biyección tal que

$$\forall x, y \in R_\triangle, \quad \varphi(x +_\triangle y) = \varphi(x) +_\diamond \varphi(y) \quad y \quad \varphi(x \cdot_\triangle y) = \varphi(x) \cdot_\diamond \varphi(y)$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

P5) Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$ y

$$A = \{F : G \to G \mid F \text{ es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *)\}.$$

1. Probar que $(A, \circ)$ es un grupo ($\circ$ es la composición de funciones).
2. Para cada $g \in G$ se define la función $F_g : G \to G$ tal que $F_g(x) = g * x * g^{-1}$ en cada $x \in G$. Pruebe que:

   a) F_g es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

   b) $F_{g*h} = F_g \circ F_h$, para todo $g, h \in G$.

   c) $F_e = Id$ (Id es la función identidad en G).

   Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.
3. Pruebe que $B = \{F_g \mid g \in G\}$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

Capítulo 7

Números Complejos

7.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Determine todos los números complejos tales que $|z-2|=1$.

2. Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^5 = i$.

Solución:

1. Supongamos z de la forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$|z-2| = |a+ib-2| = \sqrt{(a-2)^2+b^2}$$

Asi:

$$\begin{aligned} |z-2| = 1 \quad &\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+b^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (a-2)^2+b^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow b^2 = 1-(a-2)^2 \\ &\Leftrightarrow b = \sqrt{1-(a-2)^2} \ \vee \ b = -\sqrt{1-(a-2)^2} \end{aligned}$$

Pero $b \in \mathbb{R}$, por lo que debemos tener que $1-(a-2)^2 \geq 0$, desarrollemos esta desigualdad

$$1-(a-2)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \in [1,3]$$

Por lo tanto las soluciones son

$$\{a + i\sqrt{1-(a-2)^2} \mid 1 \leq a \leq 3\} \cup \{a - i\sqrt{1-(a-2)^2} \mid 1 \leq a \leq 3\}$$

2. Tenemos que resolver la ecuación $z^5 = i \Leftrightarrow z = i^{\frac{1}{5}}$, para esto escribamos i en forma polar:

$$r = |i| = 1 \quad \wedge \quad Arg(i) = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ i = e^{i(\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{i(\pi}{2+2k\pi)}}, k \in \mathbb{Z}$$

Luego $i^{\frac{1}{5}}$ toma los valores

$$w_k = 1^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5})} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

(sabemos que para los otros $k \in \mathbb{Z}$ obtendremos los mismos w)
Es decir, z puede tomar los valores:

$\cdot\ k = 0:$ $\quad w_0 = e^{i(\frac{\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 1:$ $\quad w_1 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5})} = e^{i(\frac{5\pi}{10})} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$

$\cdot\ k = 2:$ $\quad w_2 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5})} = e^{i(\frac{9\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 3:$ $\quad w_3 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5})} = e^{i(\frac{13\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 4:$ $\quad w_4 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5})} = e^{i(\frac{17\pi}{10})}$

$\square$

P2)
1. Demuestre que para $n \geq 2$ la suma de las raices n-ésimas de la unidad es igual a cero.
2. Demuestre que las raices n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raiz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raiz n-ésima de la unidad.
3. Concluya que la suma de las raices n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

Solución:

1. Para $z = 1$, $r = |z| = 1$ y $Arg(z) = \theta = 0$, entonces como las raices n-ésimes de un complejo $z \neq 0$ son $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ para $k = 0, ..., n-1$, obtenemos que las raices n-ésimas de la unidad son:

$$w_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{para } k = 0, 1, ..., n-1$$

Asi, la suma de las raices n-ésimas de la unidad es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{2k\pi}{n})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^k \\
&= \frac{1-(e^{i(\frac{2\pi}{n})})^n}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-cos(2\pi)-isen(2\pi)}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-1-0}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notar que en el desarrollo anterior usamos que $n \geq 2$, pues si n pudiera tomar el valor 1, no podriamos haber usado la fórmula

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

que es la que usamos en el segundo paso, pues ésta es válida para $r \neq 1$.

2. $\cdot$ $z = 0$: directo, pues la única raiz n-ésima del cero es el cero.

   $\cdot$ $z \neq 0$: entonces z es de la forma $z = re^{i\theta}$ con $r \neq 0$ y sus raices n-ésimas son

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

Como $w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$, tenemos que las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

En la parte (a) vimos que las raices de la unidad son:

$$v_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

Asi, las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 v_k \qquad k = 0, ..., n-1$$

Es decir, las raices n-ésimas de un complejo z son las raices n-ésimas de la unidad multiplicadas por su raiz n-ésima correspondiente a evaluar en $k = 0$.

3. Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, w_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ sus raices n-ésimas y v_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ las raices n-ésimas de la unidad. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} v_k \qquad (por\ (b)) \\ &= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} 0 \qquad (por\ (a)) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

P3)
1. Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{36}$
2. Calculando $(1 - i)^n$ demuestre que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}, k\leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}, k\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$$

3. Calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$

Solución:

1. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$ calculemos su forma polar:

   $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

   $tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1}$ y z está en el primer cuadrante $\Rightarrow$ $Arg(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$

   Luego $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}z^{36} &= (2e^{\frac{i\pi}{3}})^{36} \\ &= 2^{36} e^{\frac{i\pi 36}{3}} \\ &= 2^{36} e^{i\pi 12} \\ &= 2^{36} (e^{2i\pi})^6 \\ &= 2^{36} 1^6 \\ &= 2^{36}\end{aligned}$$

2. Por el Teorema del binomio, tenemos que

$$\begin{aligned}(1-i)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-i)^k \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(-i)+\binom{n}{2}(-i)^2+\binom{n}{3}(-i)^3+\binom{n}{4}(-i)^4+\binom{n}{5}(-i)^5+...+\binom{n}{n}(-i)^n \\ &= 1-i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+i\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-i\binom{n}{5}-\binom{n}{6}+i\binom{n}{7}+...+(-i)^n\end{aligned}$$

Antes de seguir notemos lo siguiente, como $(-i)^4=1$ tenemos que:

Haciendo $k=2l:\ (-i)^{2l}=(-1)^l; l\in\mathbb{N}$ (*)
Haciendo $k=2l+1:\ (-i)^{2l+1}=(-i)(-1)^l; l\in\mathbb{N}$

Por lo tanto los términos que acompañan a los coeficientes combinatoriales se van repitiendo (repite la serie $1,-i,-1,i$). Asi, sabemos cúales son los signos de cada término y si va multiplicado por una i o no. Ahora que tenemos claro el comportamiento de los coeficientes, escribamos $(1-i)^n$ separando la parte real e imaginaria:

$$(1-i)^n=\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\binom{n}{8}+...\right]+(-i)\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+...\right]$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k+(-i)\sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

Para entender la última igualdad, notemos que si n es par, entonces $(-i)^n$ es real (ver (*)), por lo tanto el último término pertenece a la parte real, lo que concuerda con la igualdad en cuestión, ya que si n es par entonces $\frac{n}{2}\in\mathbb{Z}$, por lo que el último término aparecerá en la parte real (el razonamiento es análogo si n es impar).
Calculemos ahora $(1-i)^n$ usando su forma polar. Sea $z=(1-i)$

$r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$tg(\theta)=-1$ y z está en el cuarto cuadrante $\Rightarrow\ \theta=\frac{-\pi}{4}$

$$\begin{aligned}(1-i)^n=z^n &= (\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n(e^{\frac{-i\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n\left(cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)-isen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= (\sqrt{2})^n cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)-i(\sqrt{2})^n sen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Asi, tenemos dos expresiones para $(1-i)^n$. Luego sus partes reales e imaginarias deben coincidir, con lo que obtenemos que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)=\sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}, k\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

3. Para calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$, veamos la forma polar de $z = 1+i\sqrt{3}$ y $z' = 1-i\sqrt{3}$

   $r = |z| = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

   $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ y $Arg(z') = \frac{-\pi}{3}$

   Luego,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z'}\right)^{10} &= (\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{-i\pi}{3}}})^{10} \\
&= (e^{\frac{i\pi}{3}-(\frac{-i\pi}{3})})^{10} \\
&= (e^{\frac{i2\pi}{3}})^{10} \\
&= e^{\frac{i20\pi}{3}} \\
&= e^{i\pi(6+\frac{2}{3})} \\
&= e^{i6\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= 1e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

□

P4) 1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n}$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

2. Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo si $z_1 = z_2$.

Solución:

1. De las propiedades de los conjugados tenemos que:

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{1+z^n} = 1 + (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = \frac{1}{1+(\overline{z})^n}$$

   Por lo tanto

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\overline{z})^n} = \frac{1}{1+z^n} + \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = 2Re\left(\frac{1}{1+z^n}\right) \in \mathbb{R}$$

   Notar que $1 + z^n \neq 0$, ya que estamos trabajando con $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$, por lo que no hay problema de indefinición.

2. Probemos las dos implicancias
   ($\Leftarrow$) Suponemos $z_1 = z_2$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |2z_1| \\ &= 2|z_1| \\ &= |z_1| + |z_1| \\ &= |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

   Por lo tanto $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

   ($\Rightarrow$) Suponemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) \\ &= 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

   Por otro lado, $(|z_1| + |z_2|)^2 = (1+1)^2 = 4$

   Ahora,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} 4 = 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \quad &\Leftrightarrow 2 = 1 + Re(z_1\bar{z}_2) \\ &\Leftrightarrow 1 = Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

Asi, llegamos a que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$. Además, notemos que

$$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2| = 1 \cdot 1 = 1$$

Veamos ahora que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$ y $|z_1\bar{z}_2| = 1$ implican que $z_1\bar{z}_2 = 1$:

$Re(z_1\bar{z}_2) = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_2 = 1 + ib$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Pero también tenemos que $|z_1\bar{z}_2| = 1$, luego

$$|1 + ib| = \sqrt{1 + b^2} = 1 \Leftrightarrow 1 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 0$$

Por lo tanto tenemos que $z_1\bar{z}_2 = 1 + i0 = 1$

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 = 1 \quad &\Rightarrow z_1^{-1}z_1\bar{z}_2 = z_1^{-1} \quad (z_1^{-1} \textit{ existe pues } z_1 \neq 0) \\ &\Rightarrow \bar{z}_2 = z_1^{-1} \\ &\Rightarrow \bar{z}_2 = \tfrac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} \\ &\Rightarrow \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \qquad (|z_1| = 1) \\ &\Rightarrow z_2 = z_1 \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow z_1 = z_2$ que es lo que queriamos demostrar.

$\square$

P5)

1. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Pruebe que z es una raiz cúbica de la unidad.
2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   a) Probar que
   $$|1 - \bar{z}_1z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$
   b) Deducir que si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, entonces
   $$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1z_2|} < 1$$

Solución:

1. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + ib$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$

   $$|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$$

   $$|z + 1| = 1 \Rightarrow |z + 1|^2 = 1 \Rightarrow (a + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2a = 2$$

   Luego, combinando ambas ecuaciones

$1 + 2a = 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{-1}{2}$. Reemplazando a en (1),

$\frac{1}{4} + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\vee\; b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Analicemos ambos casos:

$\cdot\; b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) + isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

$\cdot\; b = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{-i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{-i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) - isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) - isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

Asi, en ambos casos tenemos que $z^3 = 1$ que es lo que queriamos.

2. *a)*

$$\begin{aligned} |1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \quad & = (1 - \overline{z_1}z_2)\overline{(1 - \overline{z_1}z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ & = (1 - \overline{z_1}z_2)(1 - z_1\overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ & = (1 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_1|^2|z_2|^2) - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2) \\ & = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 \\ & = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) \end{aligned}$$

b) Como $|z_1| < 1 \ \Rightarrow \ |z_1|^2 < 1 \ \Rightarrow \ (1 - |z_1|^2) > 0$. Por lo tanto tenemos que

$$0 < (1 - |z_1|^2) \ \wedge \ 0 < (1 - |z_2|^2)$$

Luego

$$0 < (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

y por la parte anterior, tenemos que

$$0 < |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$$

o equivalentemente

$$0 < \underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|)}_{A}\underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)}_{B}$$

Ahora, como $B > 0$ y $AB > 0$, entonces $A > 0$. Por lo tanto

$$|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2| > 0 \ \Rightarrow \ |1 - \bar{z}_1 z_2| > |z_1 - z_2| \ \Rightarrow \ \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} < 1$$

Notar que no hay problema en dividir por $|1 - \overline{z_1} z_2|$, pues $|1 - \overline{z_1} z_2| > 0$. En efecto:

$$|z_1| < 1 \wedge |z_2| < 1 \ \Rightarrow \ |\overline{z_1}| \wedge |z_2| < 1 \ \Rightarrow \ |\overline{z_1} z_2| < 1 \ \Rightarrow \ -|\overline{z_1} z_2| > -1$$

Ahora, usando la propiedad de desigualdad triangular y el hecho que $|1| = 1$, obtenemos que

$$1 = |1 - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1} z_2| \leq |1 - \overline{z_1} z_2| + |\overline{z_1} z_2| \ \Rightarrow \ |1 - \overline{z_1} z_2| \geq 1 - |\overline{z_1} z_2| > 1 - 1 = 0.$$

□

7.2. Problemas propuestos.

P1)
1. Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.
2. Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte i es cero.
3. Pruebe que $\frac{(1+i)^{24}}{(1-i)^{20}} = -4$

P2) Sea α una raiz séptima cualquiera de la unidad, distinta de 1. Pruebe que :

1. $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.
2. $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

P3)

1. Calcule las raices de $z^2 = -i$ y expréselas de la forma $a + bi$.
2. Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$
3. Pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1 - i)^n + (1 + i)^n \in \mathbb{R}$.

P4) Considere los números reales

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(k\alpha) \quad y \quad S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sen(k\alpha)$$

1. Probar la siguiente igualdad de números complejos
$$S + iS' = (1 + cos(\alpha) + isen(\alpha))^n$$
2. Escriba el número complejo $1 + cos(\alpha) + isen(\alpha)$ en forma polar y deduzca que
$$S = 2^n(cos(\alpha/2))^n cos(n\alpha/2) \quad y \quad S' = 2^n(cos(\alpha/2))^n sen(n\alpha/2)$$
Indicación: recuerde que $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$ y $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$

P5) Sea $n > 2$, sea $a = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sean $X, Y \in M_{nn}(\mathbb{C})$ las matrices definidas por $(X)_{jk} = a^{(j-1)(k-1)}$ $\qquad (Y)_{jk} = a^{-(j-1)(k-1)}$.

1. Calcular X^2.
2. Calcular XY.

Capítulo 8

Polinomios

8.1. Problemas resueltos.

P1) Dado un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, se define

$$L(p(x)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \qquad (E)$$

1. Si $p(x) = (x-c)^n$ demuestre que $L(p(x)) = n(x-c)^{n-1}$
2. Demostrar que si $p(x), q(x) \in P_n(\mathbb{R})$, entonces

$$L(p \cdot q(x)) = L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x)$$

Solución:

1. Desarrollemos $p(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-c)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-c)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{n-k}}_{a_k} x^k \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
L(p(x)) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{n-k} x^{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (-1)^{n-i-1} c^{n-i-1} x^i (i+1) \qquad\qquad (c.v.:\ i = k-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (i+1)(-c)^{(n-1)-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \frac{n!}{(n-(i+1))!(i+1)!} (-c)^{(n-1)-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{((n-1)-i))!i!} (-c)^{(n-1)-i} x^i \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (-c)^{(n-1)-i} \\
&= n(x-c)^{n-1}
\end{aligned}$$

2. Sean $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

$$\begin{aligned}
L(p(x))q(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i-1} x^j \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i+j-1}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$L(q(x))p(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} j a_i b_j x^{i+j-1}$$

Por lo tanto

$$L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} j a_i b_j x^{i+j-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j-1}(i+j)$$

Veamos ahora cómo es $L(p \cdot q(x))$

$$p \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j} \Rightarrow L(p \cdot q(x)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \quad (*)$$

Luego

$$L(p \cdot q(x)) = L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x)$$

(*)Notar que aqui se usó que $L(p_1(x)) + p_2(x)) = L(p_1(x) + L(p_2(x))$ (ejercicio!!), puesto que la suma $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)a_i b_j x^{i+j-1}$ no tiene la forma del enunciado (E), hay potencias de x repetidas en distintos sumandos.

$\square$

P2) 1. Divida el polinomio $p(x) = x^5 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ por $q(x) = x^3 + x^2 + 1$.

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales distinto del polinomio nulo. Se sabe que $i, 1, 2, 3$ son raices de $p(x)$.

   a) Diga el grado minimo de dicho polinomio.

   b) Dé un polinomio mónico a coeficientes reales de dicho grado que tenga a $i, 1, 2, 3$ como raices.

Solución:

1. $(x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2) \div (x^3 + x^2 + 1) = x^2 - x + 4$

$\underline{- \;\; x^5 + x^4 + x^2}$

$-x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

$\underline{- \;\; -x^4 - x^3 - x}$

$4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

$\underline{- \;\; 4x^3 + 4x^2 + 4}$

$-10x^2 + 4x - 2$

Como $gr(-10x^2 + 4x - 2) = 2 < gr(x^3 + x^2 + 1) = 3$ ya no podemos seguir dividiendo, luego

$$x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 - x + 4) - 10x^2 + 4x - 2$$

2. *a*) Como $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, si i es raiz entonces $-i$ también lo es. Asi, tenemos que $i, -i, 1, 2, 3$ son raices del polinomio $p(x)$, por lo tanto

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i)|p(x)$$

Como $gr((x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i)) = 5$, para que lo anterior sea posible, debemos tener que $gr(p(x)) \geq 5$.

b) Un polinomio mónico es aquel en el cual el coeficiente que acompaña a la mayor potencia es 1, entonces para encontrar un polinomio mónico a coeficientes reales que tenga como raices a $i, 1, 2, 3$ (y por lo tanto a $-i$ también) basta multiplicar los polinomios de la forma $(x - k)$ con $k = i, -i, 1, 2, 3$ ya que la mayor potencia se va a producir cuando multipliquemos las x de cada polinomio. Luego, un polinomio que satisface con lo pedido es

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i) = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$$

□

P3) Dado el polinomio $p(x) = ax^5 - x^3 - ax^2 + 1$ con $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, se pide

1. Determinar el valor de a sabiendo que 1 es raiz doble de $p(x)$.
2. Determinar todas las raices de $p(x)$ para el valor de a encontrado en (a).

Solución:

1. Que 1 sea raiz doble implica que $(x-1)(x-1)|p(x)$, por lo tanto $(x-1)^2|p(x)$. Hagamos esta última división.

$$(ax^5 - x^3 - ax^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 1) = ax^3 + 2ax^2 + x(3a-1) + (3a-2)$$

$$\underline{-\ \ ax^5 - 2ax^4 + ax^3}$$

$$2ax^4 - x^3(a+1) - ax^2 + 1$$

$$\underline{-\ \ 2ax^4 - 4ax^3 + 2ax^2}$$

$$(3a-1)x^3 - 3ax^2 + 1$$

$$\underline{-\ \ (3a-1)x^3 + 2x^2(3a-1) - x(3a-1)}$$

$$(3a-2)x^2 + x(3a-1) + 1$$

$$\underline{-\ \ (3a-2)x^2 - 2x(3a-2) - (3a-2)}$$

$$(3a-3)x - 3a + 3$$

Como $(x-1)^2|p(x)$ deberiamos tener que el resto es cero, es decir

$$3a - 3 = 0 \quad \wedge \quad -3a + 3 = 0 \iff a = 1$$

2. Demostramos en la parte anterior que $a = 1$ y que (reemplazando $a = 1$ en la división que hicimos):

$$(x^5 - x^3 - x^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Luego para encontrar las otras raices de $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ hay que buscar las raices de $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Normalmente dividiriamos este último polinomio por $(x - r)$ en busca de la raiz r, pero por simple inspección notamos que -1 es una raiz. Hagamos la división para seguir buscando las otras raices:

$$(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \div (x + 1) = x^2 + x + 1$$

$$\underline{-\ \ x^3 + x^2}$$

$$x^2 + 2x + 1$$

$$\underline{-\ \ x^2 + x}$$

$$x + 1$$

$$\underline{-\ \ x + 1}$$

$$0$$

Por último, debemos encontrar las raices de x^2+x+1. Pero para este tipo de polinomios (segundo grado) tenemos una fórmula para encontrar sus raices, las que son

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Resumiendo, las raices de $p(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$ son $\{1, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

$\square$

P4) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ el resto de la división entre $p(x)$ y $(x-a)$ es igual a $A \in \mathbb{R}$ y el resto de la división entre $p(x)$ y $(x-b)$ es igual a $B \in \mathbb{R}$.
Encuentre el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$.

Solución:

Sea $r(x)$ el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$. Por el Teorema de la División,

$$p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + r(x) \quad \text{con } gr(r(x)) < gr((x-a)(x-b)) = 2$$

Por otra parte, notemos que A es también el resto de dividir $r(x)$ por $(x-a)$ y B, el de dividir $r(x)$ por $(x-b)$. En efecto, por el Teorema de la División:

$$r(x) = q_1 \cdot (x-a) + \alpha \ (*) \quad \text{con } \alpha = r(a) = cte.$$

Introduciendo esto en la división de $p(x)$ por $r(x)$

$$p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + q_1 \cdot (x-a) + \alpha = [q(x)(x-b) + q_1](x-a) + \alpha$$

Como α es de grado $\leq 0 < gr(x-a)$, por la unicidad el Teorema de la División, α es el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)$, es decir, $\alpha = A$, luego A resulta ser el resto de dividir $r(x)$ por $(x-a)$. Análogamente para B.

Notar que por (*), que ahora es $r(x) = q_1 \cdot (x-a) + A$, sólo nos falta conocer q_1, que, dado que el grado de $r(x)$ es ≤ 1, deberá ser de grado ≤ 0, es decir, una constante.
Pero el resto de dividir $r(x)$ por $(x-b)$ es $r(b)$ (por lo tanto $B = r(b)$), luego evaluando (*) en b

$$B = r(b) = q_1 \cdot (b-a) + A \ \Rightarrow \ q_1 = \frac{B-A}{b-a}$$

Asi,

$$r(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A.$$

$\square$

P5) En este problema demostraremos el llamado Teorema de Interpolación.

Sea K cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in K$, con $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Entonces existe un único polinomio de grado menor o igual a $n-1$ en $K[x]$ tq $(\forall\ j = 1, ..., n) \quad p(x_j) = y_j$.

Llamemos a este polinomio, polinomio de interpolación de la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ \ , \ \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$

1. Suponiendo la existencia de p(x), demuestre la unicidad.
2. Para cada $j = 1, ..., n$ definimos:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_j - x_k)} \in K[x]$$

   a) Determine el grado de $l_j(x)$ y pruebe que :

$$l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1 & j = r \\ 0 & j \neq r \end{cases} \qquad \forall\ j, r = 1, ..., n$$

   b) Demuestre que $p(x) = \sum_{j=1}^n y_j l_j(x) \in K[x]$ es polinomio de interpolación para la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ \ , \ \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$.

Solución:

1. Si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son polinomios de interpolación, luego

$$\forall i = 1, ..., n,\ p_1(x_i) = y_i \quad \wedge \quad \forall i = 1, ..., n,\ p_2(x_i) = y_i$$

   Entonces

$$\forall i = 1, ..., n,\ p_1(x_i) = p_2(x_i)$$

   Es decir, tenemos dos polinomios de grado $\leq n - 1 < n$ que coninciden en los n puntos distintos $x_1, ..., x_n$, por lo tanto $p_1(x) = p_2(x)$.

2. *a*) El denominador de $l_j(x)$ es una constante, asi que para ver el grado de $l_j(x)$ hay que analizar el numerador, que es

$$\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x - x_k)$$

   Vemos que el numerador es la multiplicación $(n-1)$ veces de polinomios de la forma $(x - a)$ cuyo grado es 1, por lo tanto el grado de $l_j(x)$ es $(n-1) \cdot 1 = (n-1)$.

   Sea $i \in \{1, ..., n\}$, evaluemos $l_j(x)$ en x_i

$$l_j(x_i) = \frac{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_i - x_k)}{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_j - x_k)}$$

   - $i \neq j$: como k va a tomar el valor i, el numerador va a contener el factor $(x_i - x_i) = 0$, por lo que $l_j(x_i)$ será cero.

- $i = j$: vemos directamente al evaluar que $l_j(x_j) = 1$ (numerador=denominador).

Por lo tanto
$$l_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad \forall\ j, i = 1, ..., n$$

b) Para ver que $p(x)$ es un polinomio de interpolación hay que verificar que:

1) $\underline{gr(p(x)) \leq n - 1 :}$

$$gr(p(x)) = gr(\sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x)) \leq Max_{j\in\{1,...,n\}}\{gr(l_j(x))\}$$

Pero vimos que

$$gr(l_j(x)) = n - 1\ (\forall\ j \in \{1, ..., n\})\ \Rightarrow\ gr(p(x)) \leq n - 1$$

2) $\underline{\forall\ i \in \{1, ..., n\},\ p(x_i) = y_i :}$

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x_i)$$

Pero
$$l_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad \forall\ j, i = 1, ..., n$$

Luego, el único término que sobrevive de la sumatoria es $y_i l_i(x_i) = y_i$. Asi, $\forall\ i \in \{1, ..., n\},\ p(x_i) = y_i$.

Como $p(x)$ verifica A y B, es un polinomio de interpolación.

$\square$

8.2. Problemas propuestos.

P1) Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p(x)) \geq 4$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que :

- El resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es cx.
- El resto $r(x)$, de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio “mónico”, es decir, el coeficiente asociado a x^n, donde $n = gr(r(x))$, es igual a 1.

1. Determine los valores $p(b)$ y $p(-b)$.
2. Justifique que $gr(r(x)) \leq 2$.
3. Determine $r(x)$

P2) 1. Sea $p \in K[x]$ un polinomio de grado 2 ó 3. Demuestre que p es irreducible en $K[x]$si y sólo si p no tiene raices en K.

2. Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$ una raiz de $p(x)$. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se define el polinomio $D(p)$ tal que $D(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Se sabe que si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ entonces $D(p \cdot q)(x) = D(p)(x)q(x) + p(x)D(q)(x)$. Probar que $D(p)(a) = 0$ si y sólo si $(x-a)^2$ divide a $p(x)$.

P3) 1. Se sabe que $1+i$ es una raiz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raices de p(x).

2. Sea $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$. Sean x_i con $i = 1, 2, ..., n$ las raices del polinomio p(x). Determine las raices del polinomio $g(x) = a_0 \mu^n x^n + a_1 \mu^{n-1} x^{n-1} + ... + a_{n-1} \mu x + a_n$ con $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

3. Determine las raices del polinomio :

$$16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x + 10$$

P4) Realice las siguientes divisiones :

- $(x^n - a^n) \div (x - a)$.
- $(x^n + a^n) \div (x - a)$.
- $[i \cdot z^3 + (3 + 8 \cdot i) \cdot z^2 + (-1 + 19 \cdot i) \cdot z + 3 \cdot z \cdot i - 40] \div (i \cdot z + 4 + 5 \cdot i)$.

P5) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Se sabe que al dividir $p(x)$ por $x(x^2 - 9)$ el resto es $(2x^2 - 3)$. Calcular el resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - 9)$.