

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 5: Funciones 2.0

27 de abril de 2017

Resumen: Considere $f : A \rightarrow B$ y $g : B' \rightarrow C$:

- $g \circ f$ tendrá sentido si $B \subseteq B'$ donde

$$(g \circ f) : A \rightarrow C$$

- $\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces

$$f \circ f^{-1} = id_B \wedge f^{-1} \circ f = id_A$$

- $\circ$ es asociativa, es decir,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Se tienen las siguientes propiedades:

1. f y g son inyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es inyectiva
2. f y g son epiyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es epiyectiva
3. f y g son biyectivas $\Rightarrow g \circ f$ es biyectiva
4. $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva (g no necesariamente)
5. $g \circ f$ es epiyectiva $\Rightarrow g$ es epiyectiva (f no necesariamente)

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ si se cumplen dos de las siguientes condiciones, entonces que f es biyectiva y $f^{-1} = g$.

1. $g \circ f = id_A$
2. $f \circ g = id_B$
3. g es biyectiva

- Si f y g son biyectivas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $A' \subseteq A$ se define el conjunto imagen de A' por f como

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $B' \subseteq B$ se define el conjunto imagen de B' por f como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

- (En el curso) Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación sobre A si se cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$

P1. [Calentamiento] Considere $A = \{1, \dots, n\}$. Sea B un subconjunto estricto de A , es decir, $B \subsetneq A$. Se define $G_B = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es biyección y } f(i) = i, \forall i \in B\}$ el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante a B .

- a) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$. Y que si $f \in G_B$ entonces $f^{-1} \in G_B$
- b) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$

P2. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ y $h : B \rightarrow B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = id_A$

Demuestre que f y g son biyectivas y que $h = id_B$

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

- a) Demuestre que Ψ está bien definido $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$
- b) Estudie inyectividad y epiyectividad de Ψ
- c) Demuestre que, para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

- d) **[Propuesto]** Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por $f_1(x) = 2x + 3$, $g_1 = x^3$, $f_2(x) = 5x^3 + 4$, $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$. Encuentre $\Psi(A)$.

P4. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo $\mathcal{U}$ tales que $A \cap B = \emptyset$, Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ una función.

- a) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$
- b) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$
- c) Probar que si f es epiyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = \mathcal{U}$

P5. Sea $f : E \rightarrow F$ una función:

- a) pruebe que $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
- b) pruebe que $\forall A \subseteq F, \forall B \subseteq F, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$
- c) Sea $A, B \subseteq E$, demuestre que si $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A)$
- d) Suponga ahora que f es tal que, $\forall A, B \subseteq E, [A \subseteq B, A \neq B \implies f(A) \neq f(B)]$
Demuestre que f es inyectiva.

P6. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m^2 - n^2 \text{ es múltiplo de } 3$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es equivalencia, es decir, que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.