Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 2

1 Relaciones.

1. Sea H el conjunto de todos los hombres y M el conjunto de todas las mujeres. Se define $E \subseteq H \times M$ por:

$$E = \{(h, m) \in H \times M \ / \ h \text{ está casado con } m\}.$$

Es decir, E es el conjunto de todos los matrimonios.

(a) Sea R_1 la relación definida en E por:

$$(h_1, m_1)\ R_1\ (h_2, m_2) \Longleftrightarrow \text{Algún miembro del matrimonio 1 es hermano(a) de algún miembro del matrimonio 2.}$$

Estudie si la relación R_1 es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva (justifique adecuadamente su respuesta).

(b) Se define en E la relación R_2 por:

$$(h_1, m_1)\ R_2\ (h_2, m_2) \Longleftrightarrow h_1 \text{ es hermano(a) de } h_2\ .$$

Demuestre que R_2 es relación de equivalencia y describa la clase de equivalencia de un elemento cualquiera $(h, m) \in E$.

Nota: Considere que toda persona es hermana de ella misma.

2. (a) Sea $\mathcal{R}$ una relación difinida sobre el conjunto A. Decimos que ella es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in A,\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \ \Rightarrow\ z\mathcal{R}x).$$

Probar que si $\mathcal{R}$ es refleja y circular entonces la relación es de equivalencia.

(b) Sea $A = \mathbb{R}$ y considere la relación definida sobre A por $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 + y = y^2 + x$.

i. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii. Determinar la clase de equivalencia de un real cualquiera $x = a$.

3. Sea $\mathcal{R}$ una relación simétrica en E. Definimos una nueva relación $\tilde{\mathcal{R}}$ en E por:

$$a\tilde{\mathcal{R}}b \iff \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq E \text{ t.q. } a = x_0,\ b = x_n$$
$$\text{y } \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}\ (x_i\mathcal{R}x_{i+1} \vee x_i = x_{i+1}).$$

Demuestre que $\tilde{\mathcal{R}}$ es una relación de equivalencia.

4. Considere el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los números naturales. Se define la relación $\mathcal{R}_\infty$ en $\mathbb{N}^n$ por: $\forall\, x, y \in \mathbb{N}^n$,

$$x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, ..., \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i.$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden parcial.

(b) Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual de n-tuplas:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^n,\ x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x_i \leq y_i\ \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Demuestre que $x\mathcal{R}_2 y \Rightarrow x\mathcal{R}_1 y$. Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa. Para ello construya un contraejemplo.

5. Sea E un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E por:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a\mathcal{P}b\ \wedge\ b\mathcal{P}a.$$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Sea $E/\mathcal{R} = \{[a]_\mathcal{R}\ /\ a \in E\}$ donde $[a]_\mathcal{R} = \{b \in E\ /\ a\mathcal{R}b\}$.

i. Probar que si $a' \in [a]_\mathcal{R}\ \wedge\ b' \in [b]_\mathcal{R}$ entonces $a\mathcal{P}b \Longleftrightarrow a'\mathcal{P}b'$.

ii. Se define la relación $\mathcal{Q}$ sobre $E/\mathcal{R}$ por:

$$[a]_\mathcal{R}\mathcal{Q}[b]_\mathcal{R} \Longleftrightarrow a\mathcal{P}b.$$

Probar que $\mathcal{Q}$ es de orden sobre $E/\mathcal{R}$.

6. Sea E un conjunto no vacío. Sobre $\mathcal{P}(E)$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\triangle B \text{ es un conjunto finito, es decir } \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \mid A\triangle B \mid = n.$$

Estudiar si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

7. Considere el conjunto $A = \{1, 2, ..., n\}$. Se dice que $\alpha = \{B_1, B_2, ..., B_s\}$ es una partición de A si:

- $B_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, ..., n$
- $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$
- $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Notemos por $\mathcal{D}(A)$ al conjunto que contiene todas las particiones de A. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{D}(A)$ por: $\alpha\mathcal{R}\alpha'$ ssi $\forall\, B' \in \alpha'\ \exists B \in \alpha$ t.q. $B' \subseteq B$.

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathcal{D}(A)$.

(b) Probar que si $\mid A \mid \geq 3$ la relación es de orden parcial.

8. (a) Muestre que el conjunto

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ /\ m \leq n\} \text{ es infinito numerable.}$$

(b) Sean C, D conjuntos no vacíos, con C finito y D infinito numerable.
Sea

$$\mathcal{F}(C,D) = \{f : C \to D \ / \ f \text{ es función } \}.$$

Muestre que $\mathcal{F}(C,D)$ es infinito numerable.
Indicación. Puede usar la siguiente propiedad: Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ es numerable.

9. Sea $\mathcal{R}$ una relación. Pruebe que:

$$\mathcal{R} \text{ refleja} \iff \mathcal{R}^{-1} \text{ es refleja.}$$
$$\mathcal{R} \text{ simétrica} \iff \mathcal{R}^{-1} \text{ es simétrica.}$$
$$\mathcal{R} \text{ antisimétrica} \iff \mathcal{R}^{-1} \text{ es antisimétrica.}$$
$$\mathcal{R} \text{ transitiva} \iff \mathcal{R}^{-1} \text{ es transitiva.}$$

10. Sobre el conjunto de las proposiciones se define la relación $\mathcal{R}$.

$$p\mathcal{R}q \iff (p \Longrightarrow q \text{ es verdadera}).$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

11. Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a - c = \tfrac{2}{3}(b-d).$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

12. Sea E un conjunto no vacío y $A \subseteq E$. Se define sobre $\mathcal{P}(E)$ la relación:

$$\mathcal{X} \ \mathcal{R} \ \mathcal{Y} \iff \mathcal{X} \bigcap A = \mathcal{Y} \bigcap A.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

13. Sea $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$. Sobre $\mathbb{N}^2$ se define la relación siguiente $\mathcal{R}$:

$$(m,n)\mathcal{R}(m',n') \iff n + m' = n' + m.$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathbb{N}^2$.
(b) Sea $\varphi : \mathbb{N}^2/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ con $\varphi([(n,m)]_{\mathcal{R}}) = n - m$.
Demuestre que φ es una biyección.

14. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, se construye la función: $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f_{a,b}(x) = ax + b$.
Considere el conjunto de funciones $G = \{f_{a,b} \ / \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0\}$.

(a) Pruebe que:
i. La identidad de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}$, pertenece a G.

ii. Sea $f_{a,b} \in G$, pruebe que $f_{a,b}$ es biyección y $f_{a,b}^{-1} \in G$.

iii. Pruebe que si $f_{a,b}$, $f_{a_1,b_1} \in G$ entonces $f_{a,b} \circ f_{a_1,b_1} \in G$.

(b) Sobre el conjunto de las biyecciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es biyección } \}$ considere la relación $\mathcal{R}$ siguiente: para $f, g \in \mathcal{S}$ se tiene $f\mathcal{R}g \iff g^{-1} \circ f \in G$. Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en G.

15. Sea $f : E \to F$ una función, y definamos la siguiente relación en E.

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(b) Determine una biyección entre las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$ en E y en el recorrido de f.

16. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}$ el conjunto de las particiones finitas de X. Es decir contiene a las familias finitas de subconjuntos de X, $(A_i)_{i=1}^n$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, $A_i \neq \phi$ y $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$. En $\mathcal{P}$ definimos la relación:

$$(A_i)_{i=1}^n \leq_* (B_j)_{j=1}^m \ \Leftrightarrow \ \forall j \in \{1, ..., m\} \ \exists i \in \{1, ..., n\}, \ B_j \subseteq A_i.$$

(a) Probar que $\leq_*$ es una relación de orden.

(b) Probar que el orden es parcial si X tiene al menos tres elementos.

(c) Probar que si $(A_i)_{i=1}^n \in \mathcal{P}$ y $(B_j)_{j=1}^m \in \mathcal{P}$ entonces

$$(A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m = \{A_i \cap B_j \ / \ i \in \{1, .., n\}, j \in \{1, ..., m\}, A_i \cap B_j \neq \phi\} \in \mathcal{P}.$$

(d) Probar que $(A_i)_{i=1}^n \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$ y $(B_j)_{j=1}^m \leq_* (A_i)_{i=1}^n \vee (B_j)_{j=1}^m$.

17. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función.

(a) Sea R una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de R que notamos $f^{-1}(R)$ por:

$$x \ f^{-1}(R) \ \bar{x} \ \Leftrightarrow \ f(x) \ R \ f(\bar{x}).$$

i. Probar que $f^{-1}(R)$ es una relación de equivalencia en X.

ii. Probar que $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$ para cada $x \in X$.

(b) Suponga ahora que R' es una relación de equivalencia en X y que f es sobreyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y \ f(R') \ y' \ \Leftrightarrow \ \exists \ x, x' \in X, \ f(x) = y \wedge f(x') = y' \wedge xR'x'.$$

i. Probar que si f es inyectiva entonces $f(R')$ es de equivalencia y además $R' = f^{-1}(f(R'))$.

ii. Construya un ejemplo donde f no sea inyectiva y $f(R')$ no sea de equivalencia. Que propiedad es la que no se mantiene en general.

18. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n + m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.

(a) Se define la relación R en $\mathbb{Z}$ por: $n\ R\ m \ \Leftrightarrow\ f(n)=f(m)$. Probar que R es una relación de equivalencia.

(b) Probar que $f(0)=0$, recuerde para ello que $0+0=0$.

(c) Probar que $f(-m)=-f(m)$ para cada $m\in\mathbb{Z}$. Indicación: use que $m-m=0$.

(d) Pruebe que f es inyectiva sí y sólo sí $f^{-1}(\{0\})=\{0\}$.

19. (a) Sea $f:E\to F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A))=A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces $A\cup B$ y $A\cap B$ también lo son.

(b) Sea $\mathcal{F}=\{f:A\to B\ /\ f$ es función $\}$, es decir es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$f\ R^*\ g\ \Leftrightarrow\ \forall\ a\in A,\ f(a)\ R\ g(a).$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos 2 elementos entonces R^* es una relación de orden parcial.

20. Sea Q una relación en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $A=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\ /\ f$ es función $\}$. Además definimos la relación $\mathcal{R}$ en A por: $f\ \mathcal{R}\ g\ \Leftrightarrow\ \exists\ n\geq 0,\quad \forall\ k\in\{0,...,n\},\quad f(k)\ Q\ g(k)$.

(a) Probar que $f\ \mathcal{R}\ g\ \Leftrightarrow\ f(0)\ Q\ g(0)$.

(b) Probar que si $\mathcal{R}$ es una relación de orden entonces Q es una relación de orden.

(c) Probar que si Q es una relación de equivalencia entonces $\mathcal{R}$ es también una relación de equivalencia. Además pruebe que la función $\varphi: A/\mathcal{R}\to\mathbb{R}/Q$ que asocia a cada clase de equivalencia $[f]_{\mathcal{R}}$ la clase de $f(0)$ con respecto a Q, es decir, $\varphi([f]_{\mathcal{R}})=[f(0)]_Q$, es una inyección.

21. Sea A un conjunto no vacío y $f:A\to A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n\geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f con ella misma n veces y si $n<0$ definimos $f^{(n)}=(f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n=0$ ponemos $f^{(0)}=id_A$.

Considere la relación en A definida como:

$$x\ \mathcal{R}\ y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ n\in\mathbb{Z},\ f^{(n)}(x)=y$$

(i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Considere $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ fijo. Si $A=\mathbb{Q}$ y $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ se define por $f(q)=p\cdot q$, calcular la clase de equivalencia de 0 y de 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

22. Considere el conjunto $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$(a_1,a_2)\ \mathcal{R}\ (b_1,b_2)\ \Leftrightarrow\ a_1+a_2-b_1-b_2=2k \text{ para un cierto } k\in\mathbb{Z}.$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

(iii) Pruebe que $A=[(0,0)]_{\mathcal{R}}\cup[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

(iv) Pruebe que existe una biyección $f:[(1,0)]_{\mathcal{R}}\to[(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

23. Considere la relación de orden $\mathcal{R}$ definida sobre el conjunto E. Definimos una nueva relación $\mathcal{R}^*$ en $E \times E$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}^*(c,d) \;\Leftrightarrow\; (a \neq c \wedge a\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{R}d)$$

Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden.

24. Sea B un conjunto infinito numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B (recuerde que $\preceq$ es de orden total si dados $a, b \in B$ se tiene alguna de las proposiciones siguientes: $a \preceq b$ o $b \preceq a$). Pruebe que dado $a \in B$, uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable:

$$B_1 = \{b \in B \ / \ b \preceq a\}, \ B_2 = \{b \in B \ / \ a \preceq b\}.$$

25. Sea $\mathcal{S}$ una relación en E, refleja. Se define la relación $\mathcal{R}$ en E por

$$a\mathcal{R}c \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, b_0, \ldots b_{n+1}, \text{tal que } b_0 = a, b_{n+1} = c, \\ \qquad\qquad b_i \mathcal{S} b_{i+1}, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}\,. \end{cases}$$

Pruebe que $\mathcal{S}$ es una relación refleja y transitiva.

26. Sea E un conjunto no vacío. Considere la relación sobre $\mathcal{P}(E)$ definida por

$$A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \exists\, f : E \to E, \text{biyectiva y tal que } f(A) = B.$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(ii) Pruebe que $[A]_{\mathcal{R}} = \{B \in \mathcal{P}(E) \ : \ |A| = |B|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\}\,.$
(iii) Sea $E = \mathbb{Z}$ y $P \subset \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares ¿ Es cierto qué $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})\mathcal{R}P$?

27. Definamos los conjuntos

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \text{función tal que } \forall i \in \mathbb{N} |f(i+1) - f(i)| = 1\} \qquad \mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}\,.$$

Se definen las relaciones $\leq$ y $\sim$ de la siguiente manera:

$$f \leq g \Longleftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) \ \ f(i) \leq g(i)$$

$$f \sim g \Longleftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}) \ (\forall i \in \mathbb{N}) \ \ f(i) - g(i) = k$$

(a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
(b) Demuestre que $(\forall\, f \in \mathcal{F})(\exists g \in \mathcal{F}_0) \ f \sim g$.
(c) Demuestre que existe $h \in \mathcal{F}_0$ tal que $(\forall\, f \in \mathcal{F}_0) \ h \leq f$.
(d) Sean $f, g \in \mathcal{F}_0$ arbitrarios. Demuestre que $(\forall i \in \mathbb{N}) \ (\exists\, k \in \mathbb{Z}) \ \ f(i) - g(i) = 2k$.

28. Sea $f : A \to A$ una función arbitraria. Se define por recurrencia, para todo $i \in \mathbb{N}$, la función que se denota por f^i y corresponde a componer i-veces la función f del siguiente modo,

$$f^0 = id \qquad (\forall i \geq 1) \ f^i = f^{i-1} \circ f$$

Asuma conocidas las siguientes propiedades:

- $(\forall\, i \geq 1) \ f^i = f \circ f^{i-1}$
- $(\forall\, i \in \mathbb{N})(\forall\, j \in \mathbb{N}) \ f^{i+j} = f^i \circ f^j$

- $(\forall\ i \in \mathbb{N})(\forall\ j \in \mathbb{N})\ f^{ij} = \left(f^i\right)^j$

Sea $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ y $S = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$. Fijemos $k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n$ y consideremos una función $h : S \mapsto S$ que satisface: $(\forall x \in S)\ h^k(x) = x$.

(a) Sean $x, y \in S$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $h^j(x) = y$. Demuestre que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r < k$ de modo que $h^r(x) = y$. (**Indicación:** Considere el siguiente Teorema $(\forall\ a, b \in \mathbb{N},\ b \neq 0)\ (\exists!\ q, r \in \mathbb{N})\ r < b \wedge a = qb + r)$

(b) Se define la relación $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \iff (\exists\ j \in \mathbb{N})\ h^j(x) = y.$$

Demuestre que $\sim$ es refleja, simétrica y transitiva.

2 Inducción.

1. (a) Probar **sin usar inducción** que para cada natural $n \geq 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

.

Nota: Recuerde que $\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

(b) Sean k, p, n naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq n$. Pruebe las siguientes igualdades:

i. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

ii. $\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + ... + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0} = 2^p\binom{n}{p}$.

2. (a) Ocupando sumas conocidas encuentre la fórmula de:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n.$$

y demuéstrela por inducción

(b) Demuestre que:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n,$$

donde $a + b > 0$, $a \neq b$ y $n \geq 2$.

3. (a) Sean p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

Indicación: Note que $k^2 = k(k-1) + k$.

(b) Pruebe que dado $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que :

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j} = \binom{n+j}{j+1}$$

(c) Pruebe que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ es divisible por 7.}$$

4. En hanoi, un templo budista tiene tres torres. Cuenta la leyenda que inicialmente hubo en una de las torres 64 argollas, todas de distinto tamaño, colocadas como lo indica la figura.

   Los monjes del templo deben trasladar las argollas a otra torre, trasladando sólo una a la vez y sin colocar una argolla sobre otra más pequeña. Además, la leyenda dice, que cuando los monjes terminen su tarea, habra llegado el fin del mundo.

   (a) Demostrar por inducción, que el problema de argollas tiene solución para cualquier número de argollas.

   (b) Calcular, en años, el tiempo que demorarían los monjes en trasladar las 64 argollas. Suponga (pesimistamente) que los monjes se demoran 1 segundo en trasladar una argolla, de una torre a otra.

5. Se define $a_n = 2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, ...$ Se probará que m.c.d. $(a_n, a_m) = 1$ si $n \neq m$.

   Para mostrarlo pruebe lo siguiente:

(a) Muestre por inducción que :

$$a_0 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1} + 2 = a_n \qquad para \quad n = 1, 2, ...$$

(b) Pruebe que si $\exists p > 1$ tal que $p|a_n$ y $p|a_m$ para $n \neq m$, entonces p es par e impar a la vez. Concluya el resultado, es decir que m.c.d $(a_n, am) = 1$ para $n \neq m$.

6. Calcular las sumatorias siguientes:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} C_k^2.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_n^{p-k}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)(C_n^k)^2.$

7. (a) Probar que dado $n \geq 1$, para cualquier $j \geq 0$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n} C_{i+j-1}^{j} = C_{n+j}^{j+1}$.

   (b) Concluya de la parte (i) que

$$\sum_{n_2=1}^{n_1} \sum_{n_3=1}^{n_2} ..... \sum_{n_i=1}^{n_{i-1}} ..... \sum_{n_k=1}^{n_{k-1}} 1 = C_{n_1+k-2}^{k-1}.$$

8. Probar por inducción que:

   (a) $\forall\ n \in \mathbb{N}, 6$ divide a $n^3 + 5n$.

   (b) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = \alpha n$, y determine el valor de la constante α.

   (c) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, (x - y)$ divide a $x^n - y^n$.

   (d) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   (e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, el producto de n números naturales mayores estrictos que uno y no necesariamente consecutivos es mayor estricto que n.

   (f) $\forall\ n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

(g) $\forall\ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

(h) $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$(1+\frac{1}{1})^{1+1}(1+\frac{1}{2})^{1+2}(1+\frac{1}{3})^{1+3}.........(1+\frac{1}{n})^{1+n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n!}.$$

(i) $\forall\ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

(j) $\forall\ n \geq 2, 2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, donde $(a+b) > 0$ y $a \neq b$.

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética.

   (a) Si $a_i = x$, $a_j = y$, $a_k = z$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(j-k)x + (k-i)y + (i-j)z = 0$.

   (b) Pruebe que :

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}.$$

10. Pruebe que $\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} x^k$.

11. Encuentre el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1+2x+3x^2)^5$.

12. Nos proponemos demostrar que, si tenemos n rectas en el plano, de modo tal que no existen paralelas y además la intersección entre ellas es dos a dos (es decir, no existen tres rectas que se corten en el mismo punto), entonces el total de regiones formadas es $S_n = (\sum_{j=0}^{n} j) + 1$.

   (a) Mostrar que n puntos sobre una recta generan $n+1$ segmentos (use inducción).

   (b) Usando (i) encontrar una expresión general para S_n en términos de S_{n-1}. Explique claramente y demuestre por inducción la fórmula deseada para S_n.

13. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ defina $k = 2^n$. Queremos probar que todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k-1$ elementos posee un subconjunto $X \subseteq Y$ de k elementos cuya suma es divisible por k.

   (a) Para $n = 1$ y $k = 2$ pruebe que de todo subconjunto de 3 elementos de $\mathbb{N}$ se pueden extraer 2 números cuya suma es divisible por 2.

   (b) Probar la propiedad para n cualquiera.

14. (a) Sean E un conjunto no vacío y $\ll$ un orden total sobre E. Probar que si A es un subconjunto finito no vacío de E entonces, existe $a \in A$ tal que para cada $b \in A$, $a \ll b$.

   Indicación: pruébelo por inducción sobre el número de elementos de A.

   (b) Probar por inducción que $\forall\ m \geq 1, \quad 5^{2m+1} + 7^{2m+1}$, es divisible por 6.

   (c) Probar por inducción que $\forall\ n \geq 2, \quad n^n \geq 2\ n!$.

15. (a) Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ y deduzca que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

   (b) Calcular las sumatorias siguientes.

i. $\sum_{k=n}^{m} \log(1+\frac{1}{k})$, donde $n \leq m$.

ii. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!\ (n-k)!}$, donde $n \geq 1$.

(c) Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + ... + (1+b+...+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

(d) (i) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + ... + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(p+1)} \frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(ii) Calcular para $m \geq 1$,

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

(iii) Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

16. (i) Pruebe por inducción,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{n+1}-1)$$

(ii) Se define la función $\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada número natural $n \geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \varphi_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1}) + \varphi_{n-1}(x_1, ..., x_n)$$

en cada $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Probar usando inducción que

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

(iii) Sea $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \exists\ k \in \mathbb{Z}, \exists\ i \in \mathbb{N},\ x = \frac{k}{3^i}\}$. Pruebe que A es numerable.

17. (i) Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

(ii) Demuestre por inducción que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

(iii) Probar por inducción que para $n \geq 1$

$$2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$$

es divisible por 24.

18. (i) Pruebe sin usar inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})$ se tiene que $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

    (ii) Sea $n \setminus 0$ y definamos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

    Usando (i) e inducción, pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus 0$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n.$$

    Indicación: Recuerde que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

19. Sean $n, r \in \mathbb{N}$, tales que $0 \leq n < r$. Pruebe usando inducción y sin usar inducción que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}.$$

20. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

21. Pruebe que:

    (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \left[(\sqrt{3})^{7-k} (\sqrt{2})^k \right] = 65(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

    (ii) Para todo $n \geq 10$, $n^3 < 2^n$.

    (iii) Para todo $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1}$.

22. En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ se define la ley de composición interna $\oplus$ de la siguiente forma:

$$([n], m) \oplus ([n'], m') = ([n + n'], m + m').$$

    Sea $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ en $(\mathbb{Z}, +)$. Entonces

    (a) Demuestre que $\varphi(([1], 0) = 0$.

    (b) Concluya que $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ no es isomorfo con $(\mathbb{Z}, +)$.

23. Sea $E = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in -1, 1^n \ : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0. \right\}$. Es decir,

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in E \Longleftrightarrow a_1, \ldots, a_n \in \{1, -1\}, \text{ tales que } \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

(a) Muestre que E es infinito.

(b) Pruebe que E tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{N}$.