Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 1, 2003

Lógica y Conjuntos

P1.– Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

(i) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
(iii) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
(iv) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
(vi) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$
(vii) $[p \ \wedge (p \ \Rightarrow \ q)] \ \Rightarrow \ q$
(viii) $(p \wedge q) \ \Leftrightarrow \ [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$
(ix) $(p \wedge q \Rightarrow r) \ \Leftrightarrow \ (p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q)$

P2.– Sean p y q proposiciones. Se define la proposición "ni q ni p", la que denotamos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	**q**	$\mathbf{p \downarrow q}$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(i) Probar que $\sim p \ \Leftrightarrow \ (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.
(ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $\downarrow$ y $\sim$.

P3.– Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \ \Leftrightarrow \ \text{(Existe una proposición } r \text{ tal que } (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)).$$

Pruebe que $p \vdash q \ \Leftrightarrow \ p \Rightarrow q$.

P4.– Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \sim \ q)$ es verdadera y $(q \Rightarrow r)$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p.

P5.– Negar las siguientes proposiciones:

(i) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})\ x < y$
(ii) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})\ x \geq y$
(iii) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})\ x > 1 \ \wedge \ y \leq 1$
(iv) $(\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n > n_0)\ |a_n| < \epsilon$

P6.– Probar que toda proposición compuesta formada a partir de disyunciones, conjunciones y negaciones de proposiciones simples es equivalente con una proposición donde sólo aparecen los conectivos lógicos de implicancia ($\Rightarrow$) y negación ($\sim$).

P7.– Sean A, B, C conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

(i) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
(ii) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
(iii) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(iv) $A \subseteq B \subseteq C \ \Rightarrow \ C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$
(v) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \ \Leftrightarrow \ A = \emptyset$
(vi) $(A \cap B \cap C = \emptyset) \ \Rightarrow \ [(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C]$
(vii) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
(viii) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$
(ix) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

(x) $(A\cup B=A\cap C)\Rightarrow(B\subseteq A\wedge A\subseteq C)$
(xi) $(A\cap C=\emptyset)\Rightarrow(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$
(xii) $A\Delta B=C\Rightarrow A\Delta C=B$
(xiii) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\Delta B)\cup(B\Delta C)\cup(A\Delta C)$

P8.– Sea A un subconjunto fijo del conjunto U. Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene,

$$X=Y\;\Leftrightarrow\;X\cup A=Y\cup A\;\wedge\;X\cap A=Y\cap A.$$

P9.– Sea B un subconjunto del conjunto U. Pruebe que,

$$[(\forall\,A\subseteq U)(A\cup B=A)]\;\Rightarrow B=\emptyset.$$

P10.– Sean $A\subset U$ dos conjuntos. Colocar el signo de inclusión, igualdad o ninguno de ellos según corresponda entre los conjuntos siguientes:

(i) $\mathcal{P}(A\cup B)$ y $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$
(ii) $\mathcal{P}(A\cap B)$ y $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$
(iii) $\mathcal{P}(U\setminus A)$ y $\mathcal{P}(U)\setminus\mathcal{P}(A)$

P11.– Dar los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

P12.– Sean p, q, r proposiciones.

(i) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.

(ii) Compare la proposición obtenida en el punto anterior con la proposición $(p\underline{\vee}q)\underline{\vee}r$, donde $p\underline{\vee}q\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$.

P13.– Sean A,B,C conjuntos.

(i) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:
$(x\in A\;\wedge\;y\in B)\Rightarrow y\in A$, $(x\notin A\;\vee\;y\in A)\Rightarrow y\notin B$.
Probar que $y\notin B$ es verdadera.

(ii) Probar que $C\subseteq A\cup B\Leftrightarrow(A\setminus B)\cap C=C\setminus B$.

(iii) Probar que $A\subseteq C\;\Rightarrow\;A\setminus B=C\setminus[B\cup(C\setminus A)]$.

P14.– Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M=\{X\in\mathcal{P}(E)\;/\;A\cap X=\emptyset\}$. Probar que:

(i) $\emptyset\in M$ y $E\setminus A\in M$.
(ii) $A\in M\Leftrightarrow A=\emptyset\Leftrightarrow M=\mathcal{P}(E)$.
(iii) $(\forall\,X\in M)(\forall\,Y\in\mathcal{P}(E))\;X\cap Y\in E$.
(iv) $[(X\in M)\wedge(Y\in M)]\Rightarrow[(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)]\in M$.

P15.– Sean p,q,r proposiciones.
(i) Construir la proposición compuesta "s" (en función de p,q,r) cuya tabla de verdad es:

p	**q**	**r**	**s**
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(ii) Probar que $s\Rightarrow(r\Rightarrow p)$ es una tautología.

P16.– (i) Negar la proposición siguiente:

$$(\forall\,x\in\mathbb{Q})(\forall\,\epsilon>0)(\exists\,y\in\mathbb{Q}^c)\;\epsilon/3<|x-y|<\epsilon/2.$$

(ii) Indique el valor de verdad de las proposiciones cuantificadas siguientes,
(a) $(\exists\ n \in \mathbb{N})(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ m \in \mathbb{N})\ \ n(x^2 - mx) \leq 0$.
(b) $(\forall\ x \in A)(\exists\ \delta > 0)\ \ x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < 10\}$.

P17.– Sean las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que $[(p_1 \underline{\vee} p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

(i) $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$
(ii) $[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \sim p_1] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$
(iii) $\sim [(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)] \Leftrightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)$

P18.– Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

(i) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.
(ii) Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.
(iii) Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S.

P19.– (a) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\sim (q \vee r) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\sim s \vee q)]$$

(b) Si la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa. Cual es el valor de verdad de la proposición $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$.
(c) Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

$$(\forall\ x, y \in A)\ \ (x + y \leq 1)$$

$$(\forall\ x \in A)(\exists\ y \in A)\ \ (x^2 \leq y)$$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

P20.– Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama Algebra de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

(i) $E \in M$

(ii) $(\forall\ A, B \in M)\ A \cup B \in M$

(ii) $(\forall\ A \in M)\ A^c \in M$

Se pide:

(a) Demostrar que $\emptyset \in M$
(b) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \cap B \in M$
(c) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \Delta B \in M$
(d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, averiguar si $M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es un Algebra. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

P21.– (a) Sean A y X conjuntos. Demostrar que $\{[(A \cup X) \setminus (A \Delta X)] \cup [(A \cup X) \setminus A]\} = X$
(b) Dados A, B, C conjuntos, aprovechar el resultado entregado en (a) para determinar un conjunto X tal que $(A \Delta X = B)$ y $(A \cup X = C)$.
(c) Probar que en el caso $B = C$ el conjunto X es disjunto con A.

P22.–
(i) Sean p, q y r proposiciones tales que $((\sim p \vee q)\ \Rightarrow\ r)$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique su respuesta): (a) $\sim q\ \Rightarrow \sim p$

(b) $r\ \Rightarrow\ (p\ \Leftrightarrow \sim (q \vee r))$ (ii) Sean p, q y r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$((p\ \Rightarrow\ q) \wedge (r\ \Rightarrow\ s))\ \Rightarrow\ ((p \wedge r)\ \Rightarrow\ (q \wedge s))$$

P23.–
(a) Sean p, q, r proposiciones. Averiguar si la equivalencia $p \vee (q \wedge r)\ \Leftrightarrow\ (p \vee r) \wedge q$ puede ser verdadera sin que lo sea la implicancia $p\ \Rightarrow\ q$.

(b) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \vee q\ \Leftrightarrow\ \ p \wedge r)\ \Rightarrow\ ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

(c) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow \bar{r}).$$

P24.– (a) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r, s sabiendo que la proposición

$$(s \Rightarrow (\bar{r} \vee r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \bar{r})$$

es verdadera.
(b) Sean A, B, C, D subconjuntos de un mismo universo U. Probar que

$$(B \setminus A) \subseteq C \;\Rightarrow\; (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$$

(c) Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U. Probar que

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$$

Funciones

P1.– Sean $f : E \to F$ y $g : F \to E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y

que g es sobreyectiva. **P2.**– Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$.
(i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
(ii) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.
(iii) Calcular $g \circ f(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **P3.**– Sea la función $f : [3, +\infty) \to [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva y determinar f^{-1}.

P4.– Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $f : A \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 - x$, en cada $x \in A$.
(i) Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces f es inyectiva.
(ii) Si $A = \mathbb{R}$ determinar $f(A)$. **P5.**– Sea $f : E \to F$ una función. Probar que f es biyectiva sí y sólo sí $[(\forall\; B \subseteq E)\; f(B^c) = (f(B))^c]$. **P6.**– Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.

P7.– Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$.
(i) Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces A^c, $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.
(ii) Probar que f es inyectiva sí y sólo sí todo subconjunto de E es estable.

P8.– Sean $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ dos funciones biyectivas. Definimos $\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' \;/\; h$ es una función $\}$ y $\mathcal{F}_{B,B'} = \{\bar{h} : B \to B' \;/\; \bar{h}$ es una función $\}$. Considere además la función $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \to \mathcal{F}_{B,B'}$ tal que a cada $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ le asocia la función $\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.
(i) Probar que ψ es una biyección.
(ii) Probar que h es inyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es inyectiva.
(iii) Probar que h es sobreyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es sobreyectiva.

P9.– Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$.
(i) Probar que f es una función biyectiva.
(ii) Probar que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y.

P10.– Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.
(i) Verificar que f, g y h son invertibles.
(ii) Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.
(iii) Deducir de (ii) que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.

P11.– Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que: $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$, para todo $X \subseteq E$.
(i) Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.
(ii) Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.
(iii) Determinar si f y g son sobreyectivas.
(iv) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.
(v) Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.

P12.– Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ la función que a todo $X \subseteq E$ le asigna $f(X) = E \setminus X$.
(i) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f.
(ii) Determinar $f \circ f$ y f^{-1} si existen.
(iii) Suponga que $E = \{0, 1, 2\}$. Si $A = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{1\}\}$, calcular $f(A)$ y $f^{-1}(B)$.

P13.– Sea $f : E \to F$ una función y $A, B \subseteq E$.
(i) Demostrar que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
(ii) Qué condición debe cumplir f para que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?
(iii) Qué condición debe cumplir f para que $f(E \setminus B) = F \setminus f(B)$?

P14.– Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax+b$ en cada $x \in \mathbb{R}$.
(i) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$.
(ii) Para $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva.
(iii) Para $a \neq 0$ determine $f_{a,b}^{-1}$.
(iv) Para $a \neq 0$ determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$.

P15.– Considere $A = \{1, ..., n\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$, un subconjunto estricto de A. Defina $G_B = \{f : A \to A \ / \ f$ es biyección y $f(i) = i, \ \forall \ i \in B\}$ el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante B.
(i) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$.
(ii) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$.
(iii) Pruebe que si $f \in G_B$ entonces $f^{-1} \in G_B$.

P16.– Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n+m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.
(i) Probar que $f(0) = 0$.
(ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
(iii) Pruebe que f es inyectiva sí y sólo sí $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P17.– Sea $f : E \to F$ una función. (a) Pruebe que $\forall \ A \subseteq F, \ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$. (b) Pruebe que

$\forall \ A \subseteq F, \ \forall \ B \subseteq F, \ f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

P18.– (i) Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$. (a) Determine si f, g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.
(b) Determine los conjuntos preimagenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$.

(ii) Sea $E = \{ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f$ es biyectiva $\}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : E \to E$ tal que para cada $f \in E$, $\psi(f) = f^{-1}$, es decir ψ le asocia a cada función en E su inversa. (a) Probar que ψ es biyectiva. (b) Sean f, $g \in E$. Probar que

$\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

P19.– (a) Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene,

(a.1) $A \Delta B = A \Delta C \ \Rightarrow \ B = C$,

(a.2) $A \Delta B = C \ \Rightarrow \ B = A \Delta C$,

(b) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X \Delta A$ para cada $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f.

P20.– (a) Sea $f : E \to F$ una función y A, B subconjuntos de E. Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \ \Rightarrow \ f(A \cup B) = f(A).$$

(b) Sea $f : E \to F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall \ A, B \subseteq E, \ (A \subseteq B \wedge A \neq B \ \Rightarrow \ f(A) \neq f(B)).$$

Probar que f es inyectiva (Indicación: utilice la propiedad de f con A y B adecuados).

(c) Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones. Determine explícitamente f y g sabiendo que

$$g \circ f(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

P21.– Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones (no necesariamente biyectivas). (a) Sea $A \subseteq G$. Probar que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

(b) Sea $B \subseteq F$. Probar que

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

observación: notar que son propiedades de pre–imágenes e imágenes.

P22.– (a) Sean $f : A \to A$ y $g : A \to A$ funciones. Probar que si g es biyectiva entonces se tiene,

(a.1) f es inyectiva $\Leftrightarrow f \circ g$ es inyectiva.

(a.2) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow g \circ f$ es sobreyectiva.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ la función definida en cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

(b.1) Demostrar que $f(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b.2) Demostrar que f es inyectiva.

(b.3) Se define una nueva función $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tal que en cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ se tiene $g(x) = f(x)$. Pruebe que g es biyectiva y calcule su inversa.