Resolución Auxiliar #4

P1 probar que $P = \{X : X = \{-x, x\},\ x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es partición de $\mathbb{Z}$

Dem: hay que probar que

1) $\forall X \in P,\ X \neq \phi$
2) $\forall X_1, X_2 \in P \quad X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \phi$
3) $\bigcup_{X \in P} X = \mathbb{Z}$

En efecto,

1) Sea $X \in P$ arbitrario, por definición $X = \{-x, x\}$ con $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, como $\{-x, x\} \neq \phi$ se tiene que $X \neq \phi$ $\blacksquare$

2) Por contradicción, sea $X_1, X_2 \in P$ arbitrarios, supongamos que $X_1 \neq X_2$ y $X_1 \cap X_2 \neq \phi$

$\Rightarrow$ Como $X_1 \cap X_2 \neq \phi$, $\exists a \in X_1 \cap X_2$

$\Rightarrow a \in X_1 \wedge a \in X_2$

$\Leftrightarrow a \in \{-x, x\} \wedge a \in \{-y, y\}$

Sin perdida de generalidad ✪

Como $a \in \{-x, x\}$, podemos suponer que

$x = a$ (si fuera $-x = a$ se seguira con el mismo argumento) ✪

$\Rightarrow X_1 = \{-x, x\} = \{-a, a\}$

Analogamente, como $a \in \{-y, y\}$

Suponemos que $y = a$

$\Rightarrow X_2 = \{-y, y\} = \{-a, a\}$

$\Rightarrow X_1 = \{-a, a\} = X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$

CONTRADICCIÓN $\Rightarrow\Leftarrow$!

Ya que supusimos que $X_1 \neq X_2$

✪ Sin perdida de generalidad es que uno puede situarse en un caso dentro de los posibles para desarrollar y concluir. Es comun que los otros casos se demuestren de la misma forma

3) pdq $\bigcup_{X \in P} X = \mathbb{Z}$

Lo veremos por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ debemos probar que $\bigcup_{X \in P} X \subseteq \mathbb{Z}$

En efecto, sea "$n \in \bigcup_{X \in P} X$" arbitrario

$\Rightarrow n \in X'$, con $X' \in P$, por definición

$X' = \{-k, k\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \in \{-k, k\}$, aquí, como $-k$ y k son enteros, es directo que

$\{-k, k\} \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \in \{-k, k\} \Rightarrow$ "$n \in \mathbb{Z}$"

Como logramos que $n \in \bigcup_{X \in P} X \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ con n arbitrario

Se concluye lo pedido, i.e, $\bigcup_{X \in P} X \subseteq \mathbb{Z}$

$\boxed{\supseteq}$ Veamos ahora que $\mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{x \in P} x$

Sea $n \in \mathbb{Z}$, trivialmente $n \in \{n\}$ ⊛

y trivialmente $\{n\} \subseteq \{-n, n\}$

pues "agrande" el cjto. Luego como

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o $-n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entra en la definición y es un elemento de P

$$\Rightarrow \{-n, n\} \subseteq \bigcup_{x \in P} x$$

$$\Rightarrow n \in \{n\} \subseteq \{-n, n\} \subseteq \bigcup_{x \in P} x$$

$$\Rightarrow n \in \bigcup_{x \in P} x$$

$\therefore \mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{x \in P} x$ y finalmente $\mathbb{Z} = \bigcup_{x \in P} x$

P2 $f, g : A \to B$, f inyectiva

$\varphi : A \to B \times B$ $\quad \varphi(x) = (f(x), g(x))$

pdq: φ es inyectiva

En efecto, sea $x_1, x_2 \in A$ tq

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

def φ

$$\iff (f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$$

Correspondencia por ordenado

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x_1) = g(x_2)$$

f inyectiva

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2)$$

en particular

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\blacksquare$

$\therefore$ φ es inyectiva

P3 $F = \{ f : [0,1] \to [0,1] \ / \ f \text{ es función} \}$

$\Psi : F \to [0,1] \quad \Psi(f) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$

a) Demuestre que Ψ esta bien definido

En efecto, Estudiemos $\Psi(f) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$

Por definición de F, si tomo $f \in F$ arbitrario

$\Rightarrow \quad f(x) \in [0,1] \ , \ \forall x \in [0,1]$

En particular $\qquad f(0), f(1) \in [0,1]$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & 0 < f(0) < 1 \\ + & 0 < f(1) < 1 \\ \hline & 0 < f(0) + f(1) < 2 \quad / \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{f(0) + f(1)}{2} < 1$$

Luego $\Psi(f) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2} \in [0,1]$

por lo que Ψ esta bien definido

b) • inyectividad: No es inyectiva pues puedo tomar $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ tq $f_1(0) = 1$ y $f_1(1) = 0$

y $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ tq $f_2(0) = 0$ y $f_2(1) = 1$

Luego $f_1, f_2 \in F$. Notar que da lo mismo que valores tome f_1, f_2 en el resto del dominio mientras esten en $[0,1]$

$$\Rightarrow \psi(f_1) = \frac{f_1(0) + f_1(1)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\psi(f_2) = \frac{f_2(0) + f_2(0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego $\psi(f_1) = \psi(f_2)$ pero $f_1 \neq f_2$

$\therefore$ no es inyectiva

• Epiyectiva: Si lo es, en efecto, sea $y_* \in [0,1]$ cualquiera, debemos encontrar $f \in F$ tal que

$$\psi(f) = y_*$$

Sea $f: [0,1] \to [0,1]$

Con $f(x) = y_*$ con $y_* \in \underset{\text{Codom}(f)}{\underset{\shortparallel}{[0,1]}}$ $\forall x \in \underset{\text{Dom}(f)}{\underset{\shortparallel}{[0,1]}}$

Es decir, f es una función constante.

Finalmente, para ver que es epiyectiva se reduce a lo sgte

Dem: Sea $y \in [0,1]$, tomando $f(x) = y$ $\forall x \in [0,1]$

se tiene que $\varphi(f) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$

$$= \frac{y + y}{2}$$

$$= \frac{2y}{2} = y$$

$\therefore$ es epiyectiva

$\boxed{P4}$ $F: P(A) \times P(B) \to P(A \cup B)$

$$F((X,Y)) = X \cup Y$$

a) pdq F es epiyectiva

En efecto, sea $V \in P(A \cup B)$, notemos que $V \cap A \subseteq A$ y $V \cap B \subseteq B$, Luego tomando $X = V \cap A$ y $Y = V \cap B$ se tiene que

$$F((X,Y)) = X \cup Y = (V \cap A) \cup (V \cap B)$$

$$= V \cap (A \cup B) \quad \text{Distribución}$$

$$= V \quad V \subseteq A \cup B \text{, pues } V \in P(A \cup B)$$

Luego si quiero obtener un cjto V, debo tomar el par $(V \cap A, V \cap B)$

$\therefore$ es epiyectiva

b) F no es inyectiva, Con $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$

Sea $\{2\} \in P(A\cap B) \subseteq P(A\cup B)$

$\Rightarrow$ $F((\emptyset,\{2\})) = \emptyset \cup \{2\} = \{2\}$

y $F((\{2\},\emptyset)) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$

Luego $F((\emptyset,\{2\})) = F((\{2\},\emptyset))$ pero

$(\emptyset,\{2\}) \neq (\{2\},\emptyset)$

c) F es inyectiva $\Leftrightarrow$ $A\cap B$ es vacio

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $X_1, X_2 \subseteq A$ y $Y_1, Y_2 \subseteq B$

tal que $F((X_1,Y_1)) = F((X_2,Y_2))$

$\Leftrightarrow$ $X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2$ $/\cup B$

$\Rightarrow$ $X_1 \cup (Y_1 \cup B) = X_2 \cup (Y_2 \cup B)$ Asocio $Y_1, Y_2 \subseteq B$

$\Rightarrow$ $X_1 \cup B = X_2 \cup B$ $/\cap A$

$\Rightarrow$ $(X_1 \cup B)\cap A = (X_2 \cup B)\cap A$ Distribución

$\Rightarrow$ $(X_1 \cap A) \cup (B\cap A) = (X_2 \cap A) \cup (B \cap A)$ hipotesis

$\Rightarrow$ $(X_1 \cap A) \cup \emptyset = (X_2 \cap A) \cup \emptyset$

$\Rightarrow \quad X_1 \cap A = X_2 \cap A$) pues $X_1, X_2 \subseteq A$

$\Rightarrow \quad X_1 = X_2$

Por otro lado si $F((X_1, Y_1)) = F((X_2, Y_2))$

$\Leftrightarrow \quad X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 \quad / A \cup$

$\Rightarrow (A \cup X_1) \cup Y_1 = (A \cup X_2) \cup Y_2$) Asocio $X_1, X_2 \subseteq A$

$\Rightarrow \quad A \cup Y_1 = A \cup Y_2 \quad / \cap B$

$\Rightarrow \quad (A \cup Y_1) \cap B = (A \cup Y_2) \cap B$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (Y_1 \cap B) = (A \cap B) \cup (Y_2 \cap B)$) Distribución

$\Rightarrow \quad \emptyset \cup (Y_1 \cap B) = \emptyset \cup (Y_2 \cap B)$) hipotesis

$\Rightarrow \quad Y_1 \cap B = Y_2 \cap B$

$\Rightarrow \quad Y_1 = Y_2$) pues $Y_1, Y_2 \subseteq B$

Luego como $X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2$

$\Rightarrow \quad (X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$

$\therefore$ es inyectiva

$\boxed{\Rightarrow}$ Por contradicción, supongamos que

F es inyectiva $\wedge$ $A \cap B \neq \emptyset$.

Como $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow \{x\} \in P(A) \wedge \{x\} \in P(B)$

Luego $F((\{x\}, \emptyset)) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}$

y $F((\emptyset, \{x\})) = \emptyset \cup \{x\} = \{x\}$

pero $(\{x\}, \emptyset) \neq (\emptyset, \{x\}) \Rightarrow\Leftarrow$ CONTRADICCIÓN

pues supusimos que F era inyectiva

P5) $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ $f : A \to B$

$g : C \to D$

$h : A \cup C \to B \cup D$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

a) f y g inyective $\Rightarrow$ h es inyectiva

Sea $x_1, x_2 \in A \cup C$ tq $h(x_1) = h(x_2)$

3 casos:

1) $x_1, x_2 \in A$

$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ pues f es inyectiva

2) $x_1, x_2 \in C$

$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$

$\Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ pues g es inyectiva

3) $x_1 \in A$ y $x_2 \in C$ (o viceversa)

En este caso usaremos la contrareciproca

Sea $x_1 \in A$ y $x_2 \in C$ tq

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$$

ya que $h(x_1) = f(x_1) \in B$ y

$$h(x_2) = g(x_2) \in D$$

y como $B \cap D = \emptyset$ imposible que sean iguales

b) Si f, g epiyectivas $\Rightarrow$ h es epiyectiva

En efecto, sea $y \in B \cup D$, como $B \cap D = \emptyset$ hay 2 casos

1) $y \in B$
2) $y \in D$

$\boxed{1}$ Si $y \in B$, $\exists a \in A$ tq $h(a) = f(a) = y$

pues f es epiyectiva

$\boxed{2}$ Si $y \in D$, $\exists c \in C$ tq $h(c) = g(c) = y$

pues g es epiyectiva

Luego en cualquier caso, h es epiyectiva $\boxtimes$

c) f y g biyectiva $\Rightarrow$ h biyectiva y

Calcule h^{-1}

En efecto, como f y g son biyectivas, en particular son inyectivas, Luego por a), h es inyectiva. Analogamente, como en particular f y g son epiyectivas, por b), h es epiyectiva

$\Rightarrow$ h es inyectiva y epiyectiva

$\Rightarrow$ h es biyectiva

Luego como h es biyectiva $\exists h^{-1}: B \cup D \to A \cup C$

Es natural proponer h^{-1} como

$$t(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si } x \in B \\ g^{-1}(y) & \text{si } x \in D \end{cases}$$

Veamos que cumple con ser inversa, probemos que $t(h(x)) = x$ $\forall x \in A \cup C$ y $h(t(y)) = y$ $\forall y \in B \cup D$

Luego si cumple esto $t = h^{-1}$

Sea $x \in A \cup C$ cualquiera $t(h(x)) = \begin{cases} f^{-1}(h(x)) & \text{si } h(x) \in B,\ x \in A \\ g^{-1}(h(x)) & \text{si } h(x) \in D,\ x \in C \end{cases}$

$(\star)$ $h(x) \in D \Rightarrow h(x) = g(x)$ y $h(x) \in B \Rightarrow h(x) = f(x)$

$$= \begin{cases} f^{-1}(f(x)) & \text{si } f(x) \in B,\ x \in A \\ g^{-1}(g(x)) & \text{si } g(x) \in D,\ x \in C \end{cases}$$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$g^{-1}(g(x)) = x$

pues son inversas

$$= \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ x & \text{si } x \in C \end{cases}$$

$$= x \quad \blacksquare$$

Por otro lado, sea $y \in B \cup D$ cualquiera

$$\Rightarrow h(t(y)) = \begin{cases} f(t(y)) & \text{si } t(y) \in A,\ y \in B \\ g(t(y)) & \text{si } t(y) \in C,\ y \in D \end{cases}$$

Analogo $(\star)$

$$= \begin{cases} f(f^{-1}(y)) & \text{si } f^{-1}(y) \in A,\ y \in B \\ g(g^{-1}(y)) & \text{si } g^{-1}(y) \in C,\ y \in D \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y & \text{si } y \in B \\ y & \text{si } y \in D \end{cases} = y \quad \blacksquare$$

Por lo general, a la propuesta de la inversa de una función, se le llama con otro nombre y luego de comprobar las propiedades se le pone la letra correspondiente

Luego $t(x) = h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in B \\ g^{-1}(x) & x \in D \end{cases}$ //

$\boxed{P6}$ $P_F(\mathbb{N}) = \{ A_k \subseteq \mathbb{N} : A_k \text{ finito}, k \in \mathbb{N} \text{ y } A_k \neq \phi \}$

$f : P_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $f(A_k) = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

pdq: f es epiyectiva y no biyectiva

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ Luego, considerando $X = \{n\}$ que es finito, distinto de vacío y además $X \subseteq \mathbb{N}$ pues $n \in \mathbb{N}$ (ya que ahí lo escogí)

Luego $X = \{n\} \in P_F(\mathbb{N})$

$\Rightarrow f(X) = f(\{n\}) = n$

$\therefore$ es epiyectiva ya que si quiero obtener un número "n" me basta tomar la preimagen $\{n\} \in P_F(\mathbb{N})$

- f no es biyectiva ya que no es inyectiva

En efecto, sea $\{0,2,4\}$ y $\{0,1,2,3\}$

$\Rightarrow f(\{0,2,4\}) = 0+2+4 = 6$

y $f(\{0,1,2,3\}) = 0+1+2+3 = 6$

pero $\{0,2,4\} \neq \{0,1,2,3\}$

Luego, no es inyectiva