

Propuestas Aux Extra C2



$A, B \neq \emptyset$ Demuestre

a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$

$\Rightarrow$ pda $(A \cup B) \setminus B = A$ si $A \cap B = \emptyset$

Veamos que $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap B^c$

$A \cap B = A \cap B^c$

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$

Distrib

$= (A \cap B^c) \cup \emptyset$

$B \cap B^c = \emptyset$

$= A \cap B^c$

$X \cup \emptyset = X$

Luego demostrar que $(A \cup B) \setminus B = A$ es equivalente a demostrar que $A \cap B^c = A$

Entonces...

pda $A \cap B^c = A$ si $A \cap B = \emptyset$

por doble inclusión.

$\subseteq$ sea $x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c$ en particular
 $\Rightarrow x \in A$

$\therefore A \cap B^c \subseteq A$

Nota: También puede argumentar que es directo pues $A \cap X \subseteq A \quad \forall X \subseteq U$.

$\supseteq$

Sea $x \in A$ arbitrario, notemos que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \quad \text{ya que}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{si } x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B \quad \textcircled{1} \vee x \in A \cap B^c \quad \textcircled{2}$$

se descarta $\textcircled{1}$ pues por hipótesis $A \cap B = \emptyset$

$$\Rightarrow x \in A \cap B^c$$

$$\therefore A \subseteq A \cap B^c$$

$$\Rightarrow A = A \cap B^c = (A \cup B) \setminus B \quad \text{siempre que } A \cap B = \emptyset$$

$\Leftarrow$

$$\text{partamos de } (A \cup B) \setminus B = A$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap B^c = A$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (\underbrace{B \cap B^c}_{\emptyset}) = A$$

$$\Leftrightarrow A \cap B^c = A \quad / \cap B$$

$$\Rightarrow A \cap (B^c \cap B) = A \cap B$$

$$\Rightarrow A \cap \emptyset = A \cap B$$

$$\Rightarrow \emptyset = A \cap B$$

$\square$

b) Encuentre X tal

$$\boxed{1} \quad A \cup X = A \cup B$$

$$\boxed{2} \quad A \cap X = \emptyset$$

Busquemos un CANDIDATO!

$$\text{De } \boxed{2} \quad A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \cap A = \emptyset$$

$$\hookrightarrow \text{por (a)} \quad \Leftrightarrow \quad X = (X \cup A) \setminus A \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si se} \\ \text{cumpliera} \end{array} \right\} \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B) \setminus A \\ &= (A \cup B) \cap A^c \\ &= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= \emptyset \cup (B \cap A^c) \\ &= B \cap A^c \\ &= B \setminus A \end{aligned}$$

Luego nuestro candidato es $X_* = B \setminus A$.

Veamos si funciona, es decir, que X_* satisfaga $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad A \cup X_* &= A \cup (B \setminus A) \\ &= A \cup (B \cap A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

por $A \cup B \subseteq U$

✓ cumple $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}
 [2] \quad A \cap X_* &= A \cap (B \setminus A) \\
 &= A \cap (B \cap A^c) \\
 &= (A \cap A^c) \cap B \quad \downarrow \text{Asocio} \\
 &= \emptyset \cap B \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Luego X_* satisface [2]

$\therefore X_* = B \setminus A$ es solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} A \cup X &= A \cup B \\ A \cap X &= \emptyset \end{aligned} \right\}$$

c) por la solución es única

Sea X_1, X_2 soluciones tq $X_1 \neq X_2$

$$\Rightarrow [2] \quad A \cap X_1 = \emptyset \quad \xrightarrow{\text{por (a)}} \Rightarrow X_1 = (A \cup X_1) \setminus A$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow X_1 = (A \cup B) \setminus A$$

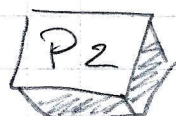
$$\text{Análogamente} \quad X_2 = (A \cup B) \setminus A$$

$$\Rightarrow X_1 = (A \cup B) \setminus A = X_2$$

$$\Rightarrow X_1 = X_2 \quad \begin{array}{l} \text{pero por hipótesis} \\ \text{de contradicción} \\ X_1 \neq X_2 \end{array}$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

Luego la solución es única

P2  $\text{folg } A \subseteq B \vee B \subseteq A \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$\Rightarrow$ Supongamos que $A \subseteq B$ (Si ocurre que $B \subseteq A$ es Análogo)

$$\Rightarrow \text{si } A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$\text{Como } A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B)$$

$$\text{por otro lado, como } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) \cup P(B) = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(B)$$

$$= P(A) \cup P(B)$$



$\Leftarrow$ por Contradicción (para generar un poco de info)

Supongamos que ① $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

y ② $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$

de ②, que $A \not\subseteq B$ significa que $\exists a \in A, \text{ta} \not\subseteq B$

$\Rightarrow a \in A \setminus B$, del mismo modo $\exists b \in B, \text{tb} \not\subseteq A$

$\Rightarrow b \in B \setminus A$

Luego como $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$

$$\Rightarrow \{a\} \subseteq A \setminus B \quad \wedge \quad \{b\} \subseteq B \setminus A$$

$$\Rightarrow \{a\} \cup \{b\} \subseteq \underbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}_{A \Delta B} \subseteq A \cup B$$

$$\Rightarrow \{a, b\} \subseteq A \cup B \quad \text{pero} \quad \{a, b\} \not\subseteq A \quad \wedge \quad \{a, b\} \not\subseteq B$$

Luego $\{a, b\} \in P(A \cup B)$ y

$$\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$$

Por lo que se concluye que $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

$\Rightarrow \Leftarrow$
Contradicción

Luego $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \Rightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$
es verdadera

P4

$$\varphi: A \times B \rightarrow A$$

$$\varphi(x, y) = x$$

a) p.d.g. φ es epyectiva

Sea $a \in A$, basta tomar el par $(a, y) \in A \times B$ con $y \in B$ cualquiera

$$\Rightarrow \varphi(a, y) = a$$

$\therefore$ es sobreyectiva, ya que si quiero obtener un "a", basta tomar $(a, y) \in A \times B$

b) φ es biyectiva $\Leftrightarrow B$ tiene solo un elemento

$\Rightarrow$ por contradicción, supongamos que

φ es biyectiva y B tiene 2 o más elementos

obs: si $B = \emptyset$ es trivial lo que se quiere probar.

S.p.g. Supongamos que $B = \{b_1, b_2\}$, como φ es particularmente inyectiva

$$\Rightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B \quad \varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Sin embargo sea (x, b_1) y (x, b_2)

P3

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D$$

a) Demostrar $A \cap B \subseteq C \cap D$

En efecto, sea $x \in A \cap B$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$\Rightarrow x \in C \wedge x \in D$$

pues $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$

$$\Rightarrow x \in C \cap D$$

$$\therefore A \cap B \subseteq C \cap D$$

b) Demostrar $A \cup B \subseteq C \cup D$

por contradicción, supongamos que $A \cup B \not\subseteq C \cup D$

$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ tal que } x \notin C \cup D$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \setminus C \cup D$$

$$\text{Como } x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\text{Si } x \in A \text{ como } A \subseteq C \Rightarrow x \in C$$

$$\Rightarrow x \in C \cup D$$

$$\text{pero } x \notin C \cup D$$

$$\Rightarrow \Leftarrow$$

$$\text{Si } x \in B \Rightarrow x \in D \Rightarrow x \in C \cup D$$

$$\text{pero } x \notin C \cup D$$

$$\Rightarrow \Leftarrow$$

Luego
 $A \cup B \subseteq C \cup D$

$$\Rightarrow \varphi(x, b_1) = x = \varphi(x, b_2)$$

$$\text{pero } (x, b_1) \neq (x, b_2)$$

Luego no es inyectiva $\Rightarrow$ ~~x~~
CONTRADICCIÓN

$\Leftarrow$ Sea $B = \{b\}$, por a) sabemos que φ es epyectiva (da lo mismo el cto B)
falta probar que φ es inyectiva

$$\text{Sea } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B \text{ t.q. } \varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$\hookrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ y } y_1 = y_2 = b \text{ pues solo hay uno}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$\therefore \varphi$ es inyectiva, luego es biyectiva

c) ¿ φ^{-1} ?

De partida $\varphi^{-1}: A \rightarrow A \times B$ y propongo que

$$f(x) = (x, b) \quad \text{donde } b \in B = \{b\}$$

$$\text{y } f: A \rightarrow A \times B$$

↓
Único

propongo que cumple con ser la inversa

$$\begin{aligned} f(\varphi(x, y)) &= f(\varphi(x, b)) && \text{pues } y=b \\ &= f(x) && \text{siempre} \\ &= (x, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \varphi(f(x)) &= \varphi((x, b)) \\ &= x \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\therefore f = \varphi^{-1}$$