MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 4:

20 de abril de 2017

Resumen:

- $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff (\exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda)$
- $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff (\forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda)$
- $\mathcal{G} \subseteq P(A)$ es partición de A si se cumple:
  1. $\forall C \in \mathcal{G}, C \neq \emptyset$
  2. Los elementos de $\mathcal{G}$, son disjuntos de a pares, es decir, $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{G}$, si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
  3. $\mathcal{G}$ cubre a A, es decir, $\bigcup_{C \in \mathcal{G}} C = A$
- Sea $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones, entonces $f = g$ es equivalente con

$$\begin{gathered} Dom(f) = Dom(g) \\ \wedge \\ Cod(f) = Cod(g) \\ \wedge \\ \forall x \in Dom(f), f(x) = g(x) \end{gathered}$$

- Una función $f : A \to B$ es inyectiva $\iff$

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Una función $f : A \to B$ es epiyectiva $\iff$

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

- Una función $f : A \to B$ es biyectiva $\iff$ es inyectiva y epiyectiva al mismo tiempo $\iff$ $\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$
- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe $f^{-1} : B \to A$ dada por:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

- Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \to A$ es tal que:
  1. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
  2. $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$.

P1. Probar que $P = \{X : X = \{-x, x\} \text{ y } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

P2. Considere las funciones $f, g : A \to B$, con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva.
Se define $\varphi : A \to B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.
Demuestre que φ es inyectiva.

P3. Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid f \text{ es función }\}$. Se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} \Psi \colon \mathcal{F} &\to [0,1] \\ f &\mapsto \Psi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2} \end{aligned}$$

a) Demuestre que Ψ está bien definido, es decir, verifique que $\forall f \in \mathcal{F},\ \Psi(f) \in [0,1]$.

b) Estudie inyectividad y epiyectividad de Ψ.

P4. Sean A, B conjuntos fijos cualesquiera, se define la función F como:

$$\begin{aligned} F\colon \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\to \mathcal{P}(A \cup B) \\ (X, Y) &\mapsto F((X, Y)) = X \cup Y \end{aligned}$$

a) Demuestre que F es epiyectiva

b) Demuestre que F no necesariamente es inyectiva, para esto considere $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$

c) Demuestre que F es inyectiva $\iff A \cap B = \emptyset$

P5. Sean A, B, C, D conjuntos no vacios tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tales que, $\forall x \in A \cup C$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \\ g(x) & si \quad x \in C \end{cases}$$

a) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva

b) Demuestre que si f, g son epiyectivas, entonces h es epiyectiva

c) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h es biyectiva y encuentre su inversa

P6. **[Propuesto - P1 b, Control Recuperativo 1997]**
Sea $\mathcal{P}_F(\mathbb{N}) = \{A_k \subseteq \mathbb{N} : A_k$ es finito con k elementos, $k \in \mathbb{N}$ y $A_k \neq \emptyset\}$ y considere f definido por:

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) &\to \mathbb{N} \\ A_k &\mapsto f(A_k) = n_1 + n_2 + n_3 \cdots + n_k,\ n_i \neq n_j\ \forall i, j \end{aligned}$$

Es decir, es la suma de los elementos de A_k. Ejemplo $f(\{0, 2, 4\}) = 6$.
Demuestre f que es epiyectiva pero no biyectiva.