MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Extra C2

17 de abril de 2017

P1. Sean $A, B, X, Y, Z \subseteq \mathcal{U}$ demuestre que:

a) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [B \setminus (A \setminus B)] = A \cup B$

b) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$

c) $A \triangle \emptyset = A$ y $A \triangle A = \emptyset$

d) $A \triangle X = A \triangle Y \implies X = Y$

e) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, que ocurre si A y B son disjuntos?

P2. Sea $A \subseteq E$ donde E es el conjunto universo, y tiene al menos dos elementos diferentes. Demuestre que:

$$[\forall B \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}) A \subseteq B] \implies A = \emptyset$$

P3. Sea $\odot$ una ley de operación entre conjuntos definida por $A \odot B = A^C \cap B^C$. Considere un universo $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ un conjunto no vacío, al cual llamaremos "*familia*". En esta pregunta, La *familia* $\mathcal{F}$ cumple la siguiente propiedad $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \odot B \in \mathcal{F}$.
Sea $A, B \in \mathcal{F}$ demuestre que:

a) $A^C \in \mathcal{F}$

b) $A \cap B \in \mathcal{F}$

c) $A \cup B \in \mathcal{F}$

d) $A \triangle B \in \mathcal{F}$

e) $\emptyset \in \mathcal{F} \wedge \mathcal{U} \in \mathcal{F}$

P4. Sea E un conjunto de referencia. Considere los conjuntos fijos $A, B \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$. Para cualquier conjunto $X \subseteq E$ se define el nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & si \quad A \cap X \neq \emptyset \\ \\ X \cup B & si \quad A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

Pruebe que:

a) $C(B) \in \{\emptyset, B\}$

b) $C(A) = A \setminus B$ y $C(A^C) = (C(A))^C$

c) Si $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \implies C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$

P5. Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X \triangle A$ para todo $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f.

Propuestos

P1. Sean A, B conjuntos no vacíos Demuestre que

a) $A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$

b) Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \text{ y } A \cap X = \emptyset$$

c) Demuestre que la solución que encontró es única.
Para esto, proceda por contradicción, es decir, suponga que hay al menos dos soluciones X_1, X_2 distintas para las mismas ecuaciones... [Completar].

P2. Sean A, B conjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que

$$A \subseteq B \vee B \subseteq A \iff \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

P3. Sean A, B, C, D conjunto en un universo $\mathcal{U}$. Suponga que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ Demuestre que:

a) $A \cap B \subseteq C \cap D$

b) $A \cup B \subseteq C \cup D$

P4. Sean A, B conjuntos no vacíos. Se define $\varphi : A \times B \to A,\ \varphi(x, y) = x$.

a) Demuestre que φ es epiyectiva.

b) Demuestre que φ es biyectiva si y solo si B tiene exactamente un elemento.

c) Encuentre la inversa de φ.