

Aux extra C2

P1 a) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [B \setminus (A \setminus B)] = A \cup B$

En efecto, vamos de izq a der

$$\begin{aligned} [A \setminus (B \setminus A)] \cup [B \setminus (A \setminus B)] &= [A \cap (B \cap A^c)^c] \cup [B \cap (A \cap B^c)^c] \\ &= [A \cap (B^c \cup A)] \cup [B \cap (A^c \cup B)] \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

El último paso, pues $A \subseteq A \cup B^c$ y $B \subseteq B \cup A^c$

b) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$

En efecto, escribamos $(X \cup Y) \times Z$ por comprensión

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \times Z &= \{ (a, b) : a \in X \cup Y \wedge b \in Z \} \\ &= \{ (a, b) : (a \in X \vee a \in Y) \wedge b \in Z \} \\ &= \{ (a, b) : (a \in X \wedge b \in Z) \vee (a \in Y \wedge b \in Z) \} \\ &= \{ (a, b) : (a \in X \wedge b \in Z) \} \cup \{ (a, b) : a \in Y \wedge b \in Z \} \\ &= (X \times Z) \cup (Y \times Z) \end{aligned}$$

$$c) \textcircled{1} A \Delta \emptyset = A \quad \text{y} \quad \textcircled{2} A \Delta A = \emptyset$$

En efecto, $\textcircled{1} A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)$

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A$$

$$\textcircled{2} A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$$

$$= \emptyset \cup \emptyset$$

$$= \emptyset$$

$$d) A \Delta X = A \Delta Y \Rightarrow X = Y$$

En efecto, Supongamos que $A \Delta X = A \Delta Y$

$$\Rightarrow A \Delta X = A \Delta Y$$

$$\Rightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta (A \Delta Y)$$

$$\Leftrightarrow (A \Delta A) \Delta X = (A \Delta A) \Delta Y$$

$$\Rightarrow \emptyset \Delta X = \emptyset \Delta Y$$

$$\Rightarrow X = Y$$

$A \Delta$

Asociatividad

parte C)

parte C)

$$c) \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Por doble inclusión

$\subseteq$ Sea $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ arbitrario,

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Luego $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ en virtud que X fue arbitrario

$\supseteq$ Sea $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ arbitrario

$$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$

$$\Rightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

$$\therefore \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

Luego por doble inclusión se probó la igualdad

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) \cap P(B) &= P(A \cap B) \\ &= P(\emptyset) \\ &= \{\emptyset\} \end{aligned}$$

P2 para $\forall B \in (P(E) \setminus \{\emptyset\}) \quad A \subseteq B \Rightarrow A = \emptyset$

En efecto, Supongamos que se cumple la hipotesis.

Luego sea $B \in P(E) \setminus \{\emptyset\}$, $B \neq \emptyset$
 tal que $A \subseteq B$, luego en $P(E) \setminus \{\emptyset\}$
 tambien esta B^c y tambien cumple
 que $A \subseteq B^c$

$$\Rightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq B^c$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \cap B^c = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \quad \square$$

P3 $\cdot A \odot B = A^c \cap B^c$
 $\cdot F = \mathcal{P}(U), \forall A, B \in F, A \odot B \in F$

Sea $A, B \in F$, demostrar que

a) $A^c \in F$

• Como $A \in F \Rightarrow A \odot A \in F$ pero

$$A \odot A = A^c \cap A^c = A^c$$

Luego $A \odot A \in F \Leftrightarrow A^c \in F$

b) $A \cap B \in F$

• por a), $A^c \in F$ y $B^c \in F$

$$\Rightarrow A^c \odot B^c \in F \text{ pero } A^c \odot B^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$$

Luego $A \cap B \in F$

c) $A \cup B \in F$

• Como $A, B \in F \Rightarrow A \odot B \in F$
 $\Leftrightarrow A^c \cap B^c \in F$

Luego por a), $(A^c \cap B^c)^c \in F \Leftrightarrow A \cup B \in F$

d) $A \Delta B \in F$

- Veamos que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$
 $= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c$

Empezemos, Como $A, B \in F$ por c) $A \cup B \in F$,
 por b) $A \cap B \in F$, por a) $(A \cap B)^c \in F$

y por b) $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in F$

$\Rightarrow A \Delta B \in F$

e) $\emptyset \in F$ y $U \in F$

- Como $A \in F \Rightarrow A^c \in F$ por (a)

Luego por b) $A \cap A^c \in F \Leftrightarrow \emptyset \in F$

por c) $A \cup A^c \in F \Leftrightarrow U \in F$

$$\boxed{P4} \quad C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

a) $C(B) \in \{\emptyset, B\}$

Por definición, $C(B) = \begin{cases} B \setminus B & A \cap B \neq \emptyset \\ B \cup B & A \cap B = \emptyset \end{cases}$

$$= \begin{cases} \emptyset & A \cap B \neq \emptyset \\ B & A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

Luego $C(B) = \emptyset$ o $C(B) = B$

$\Rightarrow C(B) \in \{\emptyset, B\}$

b) $C(A) = A \setminus B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$

En efecto, como $A \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow C(A) = A \setminus B$ pues solo entra en esta definici3n

Por otro lado, $A^c \cap A = \emptyset = (X) \cap (X)$

$$\Rightarrow C(A^c) = A^c \cup B$$

pues solo entra en esta definici3n

$$\Rightarrow C(A^c) = A^c \cup B$$

$$= (A \cap B^c)^c$$

Morgan

$$= (A \setminus B)^c$$

$$= (C(A))^c$$

c) Si $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$

Como $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B \quad \star \text{ ojo!}$$

Adem3s, Como $(X \cap Y) \cap A \subseteq X \cap A$
y $(X \cap Y) \cap A \subseteq Y \cap A$

$$\Rightarrow X \cap A \neq \emptyset \text{ y } Y \cap A \neq \emptyset \text{ pues}$$

$$(X \cap Y) \subseteq X$$

Luego $C(X) = X \setminus B$ y $C(Y) = Y \setminus B$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C(X) \cap C(Y) &= (X \setminus B) \cap (Y \setminus B) \\ &= X \cap B^c \cap Y \cap B^c \\ &= X \cap Y \cap B^c \\ &= (X \cap Y) \setminus B \\ &= C(X \cap Y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

PS $f(X) = X \Delta A$. p.d. f biyectiva y
calcular f^{-1}

En efecto,

inyectividad | Sea $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$ tal que

$$\Rightarrow f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow X_1 \Delta A = X_2 \Delta A \quad / \Delta A$$

$$\Rightarrow X_1 \Delta (A \Delta A) = X_2 \Delta (A \Delta A)$$

P.S.d

$$\Rightarrow X_1 = X_2$$

Luego f es inyectiva

Epinyectiva debemos probar que

$$\forall Y \in \mathcal{P}(E), \exists X \in \mathcal{P}(E), f(X) = Y$$

En efecto, sea $Y \in \mathcal{P}(E)$ arbitrario;
tomando $X = Y \Delta A$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(X) &= f(Y \Delta A) = (Y \Delta A) \Delta A \\ &= Y \Delta (A \Delta A) \\ &= Y \Delta \emptyset \\ &= Y \end{aligned}$$

Luego f es epinyectiva.

Para ver f^{-1} , analizemos $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f(f(X)) = f(X \Delta A) = X \Delta (A \Delta A) \\ &= X \Delta \emptyset \\ &= X \\ &= \text{id}_{\mathcal{P}(E)}(X) \end{aligned}$$

Luego $f \circ f = \text{id}_E$ y f es biyectiva
cumple 2 de las 3 propiedades vistas
en clases

$$\Rightarrow f^{-1} = f$$