MASSA 2c/u (1)

Guía N° 2.
Teoría de Conjuntos

1 Sea A un subconjunto fijo del conjunto U. Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene:

$$X = Y \iff [X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A]$$

Indicación: Pruebe previamente que:

$$B = [(B \cup A) \setminus A] \cup (B \cap A)$$

Solución:

($\Rightarrow$) Inmediato.

($\Leftarrow$) Solución 1:

Probemos primero la indicación:

$$[(B \cup A) \setminus A] \cup (B \cap A) = [(B \cup A) \cap A^c] \cup (B \cap A) \quad \text{/def de diferencia}$$

$$= [(B \cap A^c) \cup \underbrace{(A \cap A^c)}_{\phi}] \cup (B \cap A) \quad \text{/distributividad}$$

$$= (B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B \cap \underbrace{(A^c \cup A)}_{U} \quad \text{/distrib.}$$

$$= B$$

Luego como sabemos que $X \cup A = Y \cup A$ y $X \cap A = Y \cap A$ entonces:

$$[(X \cup A) \setminus A] \cup (X \cap A) = [(Y \cup A) \setminus A] \cup (Y \cap A)$$

$$\Rightarrow X = Y \quad \text{(Usando la indicación)} \ \blacksquare$$

Solución 2: Cuando no se nos ocurre como usar la indicación, no nos queda mas alternativa que buscar otro camino para llegar a la solución. Para obtener que $X = Y$ probaremos que $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$

(a) $X \subseteq Y$. (Probaremos que $u \in X \Rightarrow u \in Y$)

Demostración:

$$u \in X \Rightarrow u \in (X \cup A) \iff u \in (Y \cup A) \iff [u \in Y \vee u \in A]$$

pues $(X \cup A = Y \cup A)$

Así $u \in X \underset{(*)}{\Rightarrow} [u \in Y \vee u \in A]$ (Recordar que queremos llegar a que $u \in Y$)

Seamos pesimistas y supongamos que $u \notin Y$. Luego $u \in A$ por (*). Pero $u \in X$, entonces:

$$u \in (X \cap A) \iff u \in (Y \cap A) \iff u \in Y \wedge u \in A \Rightarrow u \in Y$$

pues $(X \cap A = Y \cap A)$ $\quad$ (-><-)

Luego nuestra suposición era incorrecta y tenemos entonces que $u \in Y$

Luego $X \subseteq Y$

(b) La demostración de que $Y \subseteq X$ es análoga.

Finalmente $X = Y$ ▨

Solución 3: En un ataque de lucidez recordamos que:

$$C \Delta D = (C \cup D) \setminus (C \cap D) \quad \forall C, D \subseteq U$$

Ahora como $X \cup A = Y \cup A$ y $X \cap A = Y \cap A$ tenemos que:

$$\underbrace{(X \cup A) \setminus (X \cap A)}_{X \Delta A} = \underbrace{(Y \cup A) \setminus (Y \cap A)}_{Y \Delta A} \quad / \Delta A$$

$$\Rightarrow (X \Delta A) \Delta A = (Y \Delta A) \Delta A$$

$$\Rightarrow \underbrace{X \Delta \underbrace{(A \Delta A)}_{\phi}}_{X} = \underbrace{Y \Delta \underbrace{(A \Delta A)}_{\phi}}_{Y}$$ Por la asociatividad de Δ. ▨

P2 Sean $A, B \subseteq U$. Pruebe que

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Longleftrightarrow A = \phi$$

Solución: Daremos 2 soluciones:

Solución 1:

$(\Leftarrow)$ $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \underset{\text{pues } A = \phi}{=} (\phi \cap B^c) \cup (\phi^c \cap B) = \phi \cup (\underbrace{U \cap B}_{B})$
$= B.$

$(\Rightarrow)$ $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)^{(*)} \quad / \cap B^c$

$$\underbrace{B \cap B^c}_{\phi} = (A \cap \underbrace{B^c \cap B^c}_{B^c}) \cup (A^c \cap \underbrace{B \cap B^c}_{\phi})$$

$$\Rightarrow \phi = A \cap B^c \quad (1)$$

Reemplazando (1) en (*) tenemos que:

$$B = \phi \cup (A^c \cap B) = A^c \cap B$$

$$\Rightarrow B^c = (A^c \cap B)^c = A \cup B^c \quad (2)$$

Reemplazo (2) en (1) y obtengo que:

$$\phi \underset{\text{Por (1)}}{=} A \cap B^c = A \cap (A \cup B^c) = \underbrace{(A \cap A)}_{A} \cup \underbrace{(A \cap B^c)}_{\phi \text{ (Por (1))}} = A$$

Solución 2: En una réplica del ataque de lucidez de la P1 notamos que:

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$$

Así nuestro problema se reduce a probar que:

$$B = A \Delta B \Longleftrightarrow A = \phi \text{ (Problema "mucho" más fácil)}$$

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Si $A = \phi \Rightarrow A \Delta B = \phi \Delta B = B$ //

$(\Rightarrow)$ Como $B = A \Delta B$ $/\Delta B$

$$\underbrace{B \Delta B}_{\phi} = (A \Delta B) \Delta B \quad \text{Asociatividad de } \Delta.$$
$$= \underbrace{A \Delta (\underbrace{B \Delta B}_{\phi})}_{A} \quad \blacksquare$$

P3 (a) Pruebe la propiedad asociativa de Δ (La cual hemos supuesto en la **P1** y la **P2**), o sea que:
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

(b) Pruebe que:
$$A \Delta B = C \iff A \Delta C = B \quad \text{(Control 1, 1994) y (Control 1, 1998)}$$

(c) Pruebe que:
$$B = A \Delta B \Rightarrow A \setminus B = \phi$$

(d) Si $A, B, C \subseteq U$ tales que $C = (A \cup B)^c$

Pruebe que:
$$A \Delta B \Delta C = A \cup B \cup C \iff A \cap B = \phi \quad \text{(Control 1, 2000)}$$

Solución:

(a) Para mayor simplicidad en el desarrollo notaremos previamente que:
$$X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (Y \cap X^c) \quad (1)$$
$$(X \Delta Y)^c = (X \cap Y) \cup (X^c \cap Y^c) \quad (2)$$

Demostración de (1):
$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cap Y^c) \cup (Y \cap X^c)$$

Demostración de (2):
$$(X \Delta Y)^c = [(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)]^c = [(X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c]^c$$
$$= (X \cup Y)^c \cup [(X \cap Y)^c]^c = (X^c \cap Y^c) \cup (X \cap Y)$$
$$= (X \cap Y) \cup (X^c \cap Y^c)$$

Así:
$$(A \Delta B) \Delta C \overset{\text{Por (1)}}{=} [(A \Delta B) \cap C^c] \cup [C \cap (A \Delta B)^c]$$
$$\overset{\text{Por (1), Por (2)}}{=} \left[[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap C^c \right] \cup \left[C \cap [(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] \right]$$
$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A \cap B) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$$
$$= \Big[A \cap \underbrace{[(B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)]}_{\text{Por (2) } (B \Delta C)^c} \Big] \cup \Big[\underbrace{[(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)]}_{(B \Delta C) \text{ Por (1)}} \cap A^c \Big]$$
$$= \left[A \cap (B \Delta C)^c \right] \cup \left[(B \Delta C) \cap A^c \right] \overset{\text{Por (1)}}{=} A \Delta (B \Delta C) \quad \blacksquare$$

(b) $(\Rightarrow)$ Como $A \Delta B = C \;/ A\Delta(\;)$

Asociatividad de Δ.

$$A \Delta (A \Delta B) = A \Delta C$$
$$\underbrace{\underbrace{(A \Delta A)}_{\phi} \Delta B}_{B} = A \Delta C$$
$$B = A \Delta C$$

$(\Leftarrow)$ Como $A \Delta C = B \;/ A\Delta(\;)$

$$A \Delta (A \Delta C) = A \Delta B$$
$$\underbrace{\underbrace{(A \Delta A)}_{\phi} \Delta C}_{C} = A \Delta B$$
$$C = A \Delta B \quad \blacksquare$$

(c) Por lo hecho en el P2) tenemos que $B = A \Delta B \Rightarrow A = \phi$

Luego $A \setminus B = \phi \setminus B = \phi$

(d) Como $C = (A \cup B)^c$, entonces:

$$A \Delta B \Delta C = (A \Delta B) \Delta (A \cup B)^c$$
$$= [\underbrace{(A \Delta B) \setminus (A \cup B)^c}] \cup [\underbrace{(A \cup B)^c \setminus (A \Delta B)}]$$

Pues $(A \Delta B)$ y $(A \cup B)^c$ son disjuntos.

$$= \quad (A \Delta B) \quad \cup \quad (A \cup B)^c$$
$$= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cup B)^c$$
$$= [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cup (A \cup B)^c$$
$$= [\underbrace{(A \cup B) \cup (A \cup B)^c}_{U}] \cap [\underbrace{(A \cap B)^c \cup (A \cup B)^c}_{(A \cap B)^c}]$$
$$= (A \cap B)^c$$

Pues $(A \cup B)^c \subseteq (A \cap B)^c$

$A \cap B \subseteq A \cup B$

Por otro lado:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (A \cup B)^c = U$$

Finalmente

$$A \Delta B \Delta C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow (A \cap B)^c = U \Leftrightarrow A \cap B = \phi \quad \blacksquare$$

P4) (a) Sea $B \subseteq U$. Pruebe que

(*) $(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A) \Rightarrow B = \phi$ (Control 1, 1995)

(b) Sean $A, B, C \subseteq U$. Pruebe que:

(b.1) $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$ (Control 1, 1996)

(b.2) $A \subseteq C \Rightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$

(b.3) $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap C = C \setminus B$

(b.4) $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C$

(c) Sean $A, B, C, D \subseteq U$. Pruebe que:

$$(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$$

(Control 1, 1999)

Solución:

(a) Como $(\forall A \subseteq U)\ A \cup B = A$, en particular debe cumplirse para $A = \phi \subseteq U$

Luego $\underbrace{\phi \cup B}_{B} = \phi$ ▨

(b) (b.1) Notemos que $C \setminus [B \cup (C \setminus A)] = C \cap [B \cup (C \cap A^c)]^c$

$= C \cap B^c \cap (C^c \cup A)$

$= B^c \cap [\underbrace{(C \cap C^c)}_{\phi} \cup (C \cap A)]$

$= B^c \cap C \cap A$

$= C \cap A \cap B^c$

$= C \cap (A \setminus B) \subseteq (A \setminus B)$

Luego "siempre" se cumple que $C \setminus [B \cup (C \setminus A)] \subseteq (A \setminus B)$

Luego basta probar que $(A \setminus B) \subseteq C \cap (A \setminus B)$
$= C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$

Pdq $\mu \in (A \setminus B) \Rightarrow \mu \in C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$

Pero $\mu \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \mu \in A \wedge \mu \notin B$

$\Rightarrow \mu \in A \wedge \mu \notin B \wedge \underbrace{\mu \in C}_{\text{Pues } A \subseteq C}$

$\Leftrightarrow \mu \in (C \cap A \cap B^c)$ (O sea $u \in A \Rightarrow u \in C$)

Ver lo anterior

$\Leftrightarrow \mu \in (C \cap (A \setminus B))$

$\Leftrightarrow \mu \in C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$

Luego $C \setminus [B \cup (C \setminus A)] = A \setminus B$ cuando $A \subseteq C$ ▨

(b.2) Notemos que

$C \setminus (B \setminus A) = C \cap (B \cap A^c)^c = C \cap (B^c \cup A)$

$= (C \cap B^c) \cup \underbrace{(C \cap A)}_{A}$ (Pues $A \subseteq C$)

$= A \cup (C \cap B^c)$

$= A \cup (C \setminus B)$ ▨

(b.3) Notemos que $(A \setminus B) \cap C = A \cap B^c \cap C = A \cap (B^c \cap C)$

$\subseteq B^c \cap C = C \cap B^c$

$= C \setminus B$

Pues siempre $A \cap X \subseteq X$

Luego siempre $(A \setminus B) \cap C \subseteq C \setminus B$

Ahora comencemos la demostración:

$(\Rightarrow)$ Pdq $(A \setminus B) \cap C = C \setminus B$

Por lo hecho anteriormente basta probar que

$C \setminus B \subseteq [(A \setminus B) \cap C]$

lo hago aparecer

Pero:

$$C\setminus B = C\cap B^c = C\cap C\cap B^c \quad \text{) Pues } C\subseteq A\cup B$$
$$\subseteq C\cap(A\cup B)\cap B^c$$
$$= C\cap[(A\cap B^c)\cup \underbrace{(B\cap B^c)}_{\phi}]$$
$$= (A\setminus B)\cap C \quad ▨$$

(⇐) Asumiendo que $(A\setminus B)\cap C = C\setminus B$, probaremos que $C\subseteq A\cup B$.

Pero $(A\setminus B)\cap C = C\setminus B$

$$\Rightarrow A\cap B^c\cap C = C\cap B^c \;/\cap A^c$$
$$\underbrace{\underbrace{(A\cap A^c)}_{\phi}\cap B^c\cap C}_{\phi} = C\cap A^c\cap B^c$$
$$= C\cap(A\cup B)^c$$

Luego C y $(A\cup B)^c$ son disjuntos

$$\therefore\ C\underset{(*)}{\subseteq}((A\cup B)^c)^c = A\cup B$$

(*) Esto es porque si X e Y son disjuntos, entonces $X\subseteq Y^c$
(Prueben esto último como ejercicio) ▨

(b.4) $A\cup B = B\cap C$

$$\Rightarrow A\subseteq A\cup B = B\cap C\subseteq B \Rightarrow A\subseteq B$$
$$\Rightarrow B\subseteq A\cup B = B\cap C\subseteq C \Rightarrow B\subseteq C$$

Luego $A\subseteq B\subseteq C$

Nota: En el control 1 de 1993 se preguntó lo siguiente:

P] (a) Demuestre que
$$A\cup B = A\cap C \Rightarrow (B\subseteq A \wedge A\subseteq C)$$
(b). Concluya que:
$$A\cup B = A\cap B \Rightarrow A = B$$
(Traten de hacerlo, verán que no es muy difícil con lo que ya hemos aprendido) ▨

(c) Tenemos que $(B\setminus A)\subseteq C$. Luego $C^c\subseteq(B\setminus A)^c$

Notemos que $D\setminus C = D\cap C^c \subseteq D\cap(B\setminus A)^c$

Pues $C^c\subseteq(B\setminus A)^c$

$$= D\cap(B\cap A^c)^c$$
$$= D\cap(B^c\cup A)$$
$$\subseteq (D\cup A)\cap(B^c\cup A)$$

pues $D\subseteq D\cup A$

$$= (D\cap B^c)\cup A$$
$$= (D\setminus B)\cup A$$

Notemos que hemos asumido el hecho de que:
$$X\subseteq Y \Rightarrow A\cap X\subseteq A\cap Y$$
(Pruébenlo!) ▨

En el caso en que no recibamos aquella "inspiración" para resolver el problema pasado podemos hechar mano de nuestra buena amiga "La lógica".

Así $B\setminus A \subseteq C$ se puede escribir como

$$[x\in B \wedge x\notin A] \Rightarrow x\in C \qquad (p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim q \Rightarrow \sim p)$$

o bien

$$\sim x\in C \Rightarrow \sim[x\in B \wedge x\notin A] \qquad \text{contrarecíproca.}$$

$$x\notin C \Rightarrow x\notin B \vee x\in A \quad (*)$$

Probemos ahora que $D\setminus C \subseteq (D\setminus B)\cup A$

o sea que $x\in D\setminus C \Rightarrow x\in[(D\setminus B)\cup A]$

Comencemos:

$$\begin{aligned}
x\in D\setminus C &\Leftrightarrow x\in D \wedge x\notin C \quad \text{Por } (*)\\
&\Rightarrow x\in D \wedge (x\notin B \vee x\in A)\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x\in D \wedge x\notin B) \vee (x\in D \wedge x\in A)}_{\text{Lo distribuyo.}}\\
&\Leftrightarrow [(x\in D \wedge x\notin B) \vee x\in D]\\
&\qquad \wedge [(x\in D \wedge x\notin B) \vee x\in A]
\end{aligned}$$

Pues $p\wedge q \Rightarrow q$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [(x\in D \wedge x\notin B) \vee x\in A]\\
&\Leftrightarrow x\in(D\setminus B) \vee x\in A\\
&\Leftrightarrow x\in(D\setminus B)\cup A \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$(A\cap B)\cap C=\phi$

$(A\cap B)\subseteq C^c$

$C\subseteq (A\cap B)^c$

P5 Sean $A, B, C \subseteq U$. Pruebe que

(a) (a.1) $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\setminus C)$

(a.2) $A\cap C=\phi \Leftrightarrow (A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$

(a.3) De un ejemplo que muestre que en general en (a.1) no hay igualdad.

(Control 1, 1994)

(b) $B\cap C=\phi \Rightarrow [A\setminus(B\cup C)]\cup C = (A\cup C)\setminus B$

(c) $A\cap B\cap C=\phi \Rightarrow [(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A) = A\cup B\cup C]$

(Control 1, 1997)

Solución:

Antes de empezar demostraremos dos propiedades útiles para estos ejercicios.

① $X\cap Y=\phi \Rightarrow X\cap Y^c = X$

② $X\cap Y=\phi \Rightarrow [X^c\cup Y = X^c \wedge X\cup Y^c = Y^c]$

Estas demostraciones son directas si hicieron el propuesto del **P4** (b) (b.3).

Comencemos:

(a)(a.1) Notemos que $(A\setminus B)\setminus C = (A\cap B^c)\cap C^c$

y que
$$\begin{aligned}
A\setminus(B\setminus C) &= A\cap(B\setminus C)^c = A\cap(B\cap C^c)^c\\
&= A\cap(B^c\cup C)\\
&=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

Luego $(A\setminus B)\setminus C = (A\cap B^c)\cap C^c$

$\subseteq (A\cap B^c) \subseteq (A\cap B^c)\cup(A\cap C)$

$= A\setminus(B\setminus C)$

pues $X\cap Y\subseteq X$ pues $X\subseteq X\cup Y$ ▨

(a.2) $(\Rightarrow)$ $(A\setminus B)\setminus C = (A\cap B^c)\cap C^c$

$= (A\cap C^c)\cap B^c = A\cap B^c$

Ver propiedad (1) ⟵ $A\cap C^c = A$ pues $A\cap C = \phi$

y $A\setminus(B\setminus C) = (A\cap B^c)\cup(\underbrace{A\cap C}_{\phi}) = A\cap B^c$

Luego $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\exists x$ tal que $x\in A \wedge x\in C$

Luego $x\in A\cap C \Rightarrow x\in (A\cap B^c)\cup(A\cap C)$

$= A\setminus(B\setminus C)$

$= (A\setminus B)\setminus C$ Por que es esto lo que asumimos verdadero

Así $x\in(A\setminus B)\setminus C$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B) \wedge x\notin C \Rightarrow x\notin C$ $(\Rightarrow\!\Leftarrow)$

Luego $\nexists x$ tal que $x\in A \wedge x\in C \Leftrightarrow x\in(A\cap C)$

$\therefore A\cap C = \phi$ ▨

(a.3) Basta tomar A y C "no" disjuntos (Ver (a.2))

Sea $A = \{1\}$

$B = \{1,2\}$ $\qquad A\cap C = \{1\}\neq\phi$

$C = \{1,2,3\}$

Luego $(A\setminus B)\setminus C = (\phi)\setminus C = \phi$

y $A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(\phi) = A = \{1\}$

Así $(A\setminus B)\setminus C \neq A\setminus(B\setminus C)$ ⟿ Lógico pues $A\cap C\neq\phi$ ▨

(b) $[A\setminus(B\cup C)]\cup C = [A\cap(B\cup C)^c]\cup C$

$= [A\cap(B^c\cap C^c)]\cup C$

$= [A\cap B^c\cap C^c]\cup C$

$= (A\cup C)\cap\underbrace{(B^c\cup C)}_{B^c}\cap\underbrace{(C^c\cup C)}_{U}$

$B^c\cup C = B^c$ pues $B\cap C = \phi$ (Ver propiedad (2))

$= (A\cup C)\cap B^c$

$= (A\cup C)\setminus B$ ▨

c) Probaremos que:

$(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$

y como $A\cap B\cap C=\phi$, el resultado es directo.

Veamos que:

$$[(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)]=[(A\cap B^c)\cup(B\cap C^c)]\cup(C\cap A^c)$$

$$=[(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup C^c)}_{(C\cap A^c)^c}\cap\underbrace{(B^c\cup B)}_{U}\cap(B^c\cup C^c)]\cup(C\cap A^c)$$

distribuyendo

distribuyo

$$=[\underbrace{(A\cup B)}_{\text{distribuyo.}}\cup(C\cap A^c)]\cap\underbrace{[(C\cap A^c)^c\cup(C\cap A^c)]}_{U}\cap[\underbrace{(B^c\cup C^c)}_{\text{distribuyo}}\cup(C\cap A^c)]$$

$$=[(A\cup B\cup C)\cap\underbrace{\underbrace{\underbrace{(A\cup B\cup A^c)}_{(A\cup A^c)\cup B}}_{U}}_{U}]\cap[\underbrace{\underbrace{(B^c\cup C^c\cup C)}_{U}}_{U}\cap\underbrace{(B^c\cup C^c\cup A^c)}_{(A\cap B\cap C)^c}]$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\ \blacksquare$$

P6 Sean $A,B,C\subseteq U$. Pruebe que:

(a) (a.1) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$

(a.2) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=A\setminus(B\cup C)$

(a.3) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$

(a.4) $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$

(b) (b.1) $[A\setminus(B\setminus A)]\cup[(B\setminus A)\setminus A]=A\cup B$

(b.2) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$

(b.3) $[(A\cap B)\setminus(A\cap C)]=(A\cap B)\setminus(A^c\cup C)$ (Control 1, 1995)

(c) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\cup(C\triangle A)$

Solución:

(a) (a.1) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=A\cap(B^c\cup C^c)$

$=A\cap(B\cap C)^c$

$=A\setminus(B\cap C)\ \blacksquare$

(a.2) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)=A\cap(B^c\cap C^c)$

$=A\cap(B\cup C)^c$

$=A\setminus(B\cup C)\ \blacksquare$

(a.3) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)=(A\cup B)\cap C^c$

$=(A\cup B)\setminus C\ \blacksquare$

$|2-x|=|x|$

$||2-x|-|x||$

$2\ 1\ 0$

(a.4) $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)=A\cap B\cap C^c$
$=(A\cap B)\setminus C$ ▨

(b) (b.1) $[A\setminus(B\setminus A)]\cup[(B\setminus A)\setminus A]$

$=[A\cap(B\cap A^c)^c]\cup[(B\cap \underbrace{A^c)\cap A^c}_{A^c}]$

$=[A\cap(B\cap A^c)^c]\cup(B\cap A^c)$

$=[A\cup(B\cap A^c)]\cap[\underbrace{(B\cap A^c)^c\cup(B\cap A^c)}_{U}]$

$=(A\cup B)\cap(\underbrace{A\cup A^c}_{U})$

$=A\cup B.$ ▨

(b.2) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap C^c\cap(B^c\cup C)$
$=A\cap[(C^c\cap B^c)\cup(\underbrace{C^c\cap C}_{\phi})]$

$=A\cap C^c\cap B^c=A\cap B^c\cap C^c$
$=(A\setminus B)\setminus C$ ▨

(b.3) $[(A\cap B)\setminus(A\cap C)]=(A\cap B)\cap(A\cap C)^c$
$=(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)$
$=A\cap B\cap(A^c\cup C^c)$

Distribuyo

$=B\cap[(\underbrace{A\cap A^c}_{\phi})\cup(A\cap C^c)]$

$=A\cap B\cap C^c$

Ahora: $(A\cap B)\setminus(A^c\cup C)=(A\cap B)\cap(A^c\cup C)^c$
$=A\cap B\cap A\cap C^c$
$=A\cap B\cap C^c$

$\therefore\ [(A\cap B)\setminus(A\cap C)]=(A\cap B)\setminus(A^c\cup C)$ ▨

(c) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c$
$=(A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$

$=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$
$\cup(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)\cup(B\cap C^c)$
$\cup(C\cap A^c)\cup(C\cap B^c)\cup(C\cap C^c)$

pero $A\cap A^c=\phi$
$B\cap B^c=\phi$
$C\cap C^c=\phi$

$= (A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)\cup(B\cap A^c)\cup(B\cap C^c)\cup(C\cap A^c)\cup(C\cap B^c)$
$= (A\setminus B)\cup(A\setminus C)\cup(B\setminus A)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$
$= \underbrace{[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]}\cup\underbrace{[(B\setminus C)\cup(C\setminus B)]}\cup\underbrace{[(C\setminus A)\cup(A\setminus C)]}$
$= (A\Delta B) \quad \cup \quad (B\Delta C) \quad \cup \quad (C\Delta A)$ ▨

P7 (a) Sean A, B conjuntos. Demostrar que:
$[(A\cup B)\setminus(A\Delta B)]\cup[(A\cup B)\setminus A] = B$
(b) Probar que si $A\cup B = A\Delta B$, entonces A es disjunto con B.

Solución:
(a) $[(A\cup B)\setminus(A\Delta B)]\cup[(A\cup B)\setminus A]$

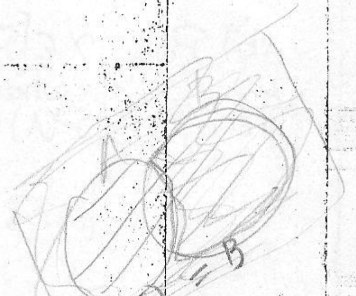
Ver P6(a)(a.1)

$= (A\cup B)\setminus[(A\Delta B)\cap A]$
$= (A\cup B)\setminus[[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\cap A]$
$= (A\cup B)\setminus[[(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap A]$
$= (A\cup B)\setminus\big[\underbrace{(A\cap B^c\cap A)}_{A\cap B^c}\cup\underbrace{(B\cap \underbrace{A^c\cap A}_{\phi})}_{\phi}\big]$

$= (A\cup B)\cap(A\cap B^c) = (A\cup B)\cap(A^c\cup B) = \overbrace{(A\cap A^c)}^{\phi}\cup B$
$= B$ ▨

(b) Como $A\cup B = A\Delta B \Rightarrow (A\cup B)\setminus(A\Delta B) = \phi$
Reemplazando en la igualdad obtenida en (a)

$\phi\cup[(A\cup B)\setminus A] = B$
$(A\cup B)\cap A^c = B \quad / \cap A$
$\underbrace{(A\cup B)\cap \underbrace{A^c\cap A}_{\phi}}_{\phi} = B\cap A \quad \Rightarrow A\cap B = \phi$



$(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c) = B$
$B\cap A^c = B$
$A^c \subseteq B$
$\Rightarrow A\cap B = \phi$

Si "no se nos ocurre" como usar (a) para resolver (b), tenemos la siguiente opción:

$A\cup B = A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \;/\cap(A\cap B)$

$\Rightarrow \underbrace{(A\cup B)\cap(A\cap B)}_{(A\cap B)} = \underbrace{(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cap B)^c\cap(A\cap B)}_{\phi}}_{\phi}$ ▨

Pues
$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$

P8 Sean $A, B \subseteq U$. Pruebe que se cumple que:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

(b) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(d) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$

(e) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Solución:

(a) $(\Rightarrow)$ Pdq $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, o sea

$$x \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow x \in \mathcal{P}(B)$$

Pero $x \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \underbrace{x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B}_{\text{Pues } A \subseteq B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(B)$

$\therefore \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ▨

$(\Leftarrow)$ Como sabemos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

y $A \in \mathcal{P}(A) \rightsquigarrow$ siempre se cumple

$\Rightarrow A \in \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ ▨

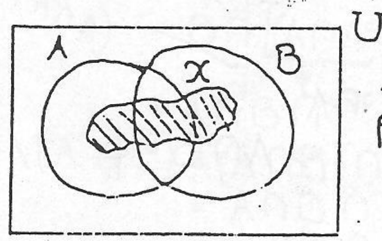
(b) Pdq $x \in [\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \Rightarrow x \in \mathcal{P}(A \cup B)$

Pero $x \in [\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \vee x \in \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} x \subseteq A \cup B \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A \cup B)$

(*) Notamos en la figura siguiente que en general la implicancia en el sentido contrario $(\Leftarrow)$ es FALSA



Aquí $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$
pero $x \notin \mathcal{P}(A)$
y $x \notin \mathcal{P}(B)$ ▨

(c) Pdq $x \in [\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A \cap B)$

Pero esto es cierto pues:

$x \in [\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B)$

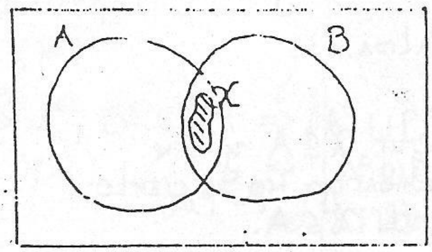
$\Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B$

Aquí si se cumple la equivalencia. $\overset{(**)}{\Leftrightarrow} x \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A \cap B)$

13

(**) Aquí la equivalencia es clara.



Prueben que
$X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \subseteq (A \cap B)$ $\boxed{}$

(d) ($\Rightarrow$) Como $A \cap B = \phi \Rightarrow \underbrace{\mathcal{P}(A \cap B)}_{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)} = \mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$ Por parte (c)

($\Leftarrow$) Sabemos que $\# \mathcal{P}(A) = 2^{\# A}$
donde $\# X$ se entiende como el número de elementos del conjunto X.

Luego como $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\} = \mathcal{P}(A \cap B)$
$\Rightarrow \# \mathcal{P}(A \cap B) = \# \{\phi\} = 1$
pero $\# \mathcal{P}(A \cap B) = 2^{\#(A \cap B)}$ $(A \cap B)$ no tiene elementos.
Así $2^{\#(A \cap B)} = 1 \Rightarrow \#(A \cap B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \phi$ $\boxed{}$

(e) $A = B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \Leftrightarrow [\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)]$
$\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ $\boxed{}$
Por parte (a)

Luego, notamos en el problema pasado (d) que al escribirlo de la forma $A \cap B = \phi \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{P}(A \cap B)}_{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)} = \{\phi\} = \mathcal{P}(\phi)$

o sea $A \cap B = \phi \Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(\phi)$,
es un caso particular de lo hecho anteriormente.

(Pues (e) nos dice $X = Y \Leftrightarrow \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$ Tomando $X = A \cap B$ e $Y = \phi$ obtenemos lo pedido)

Comentario: Usualmente se pregunta que relación (inclusión o igualdad) hay entre $\mathcal{P}(U \setminus A)$ y $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$.

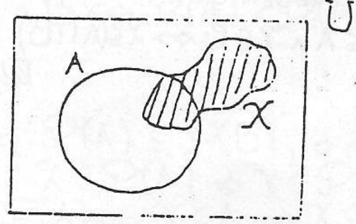
Notemos que $X \in \mathcal{P}(U \setminus A) \Leftrightarrow X \subseteq U \setminus A \Leftrightarrow X \subseteq A^c$
y que
$X \in \mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(U) \wedge X \notin \mathcal{P}(A)$
$\Leftrightarrow \underbrace{X \subseteq U}_{V} \wedge X \notin A \Leftrightarrow X \notin A$

Nos gustaría una implicancia del tipo

(1) $X \subseteq A^c \Rightarrow X \notin A$ o bien la opuesta, o sea:

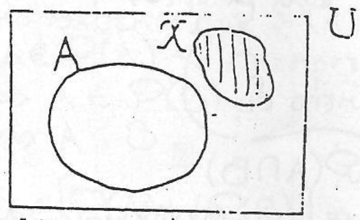
(2) $X \notin A \Rightarrow X \subseteq A^c$ para obtener alguna inclusión.

Notemos que (2) es terriblemente falsa.



Aquí $X \notin A$ y sin embargo no es cierto que $X \subseteq A^c$.

Ahora (1) se ve muy bien... por lo menos en el dibujo:



Pero "catastróficamente" si $X = \phi$ tendremos que $X \subseteq A^c$ y sin embargo no es cierto que $X \notin A$ (Pues $\phi \subseteq A$)

Luego (1) "también" es falsa.

Veamos un ejemplo:

$A = \{a\}$ $\Rightarrow A^c = \{b\}$

$U = \{a, b\}$

con $a \neq b$

Así $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}\}$

$\mathcal{P}(A^c) = \{\phi, \{b\}\}$

$\mathcal{P}(U) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Luego $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$

$\neq \mathcal{P}(A^c) = \{\phi, \{b\}\}$ ■

No hay inclusión de ningún tipo.

P9 Un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama Algebra de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

(i) $E \in \mathcal{M}$

(ii) $(\forall A, B \in \mathcal{M})\ A \cup B \in \mathcal{M}$

(iii) $(\forall A \in \mathcal{M})\ A^c \in \mathcal{M}$ (Se entiende A^c como $E \setminus A$)

Se pide demostrar que:

(a) $\phi \in \mathcal{M}$

(b) $(\forall A, B \in \mathcal{M})\ A \cap B \in \mathcal{M}$

(c) $(\forall A, B \in \mathcal{M})\ A \triangle B \in \mathcal{M}$

Solución:

(a) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c = \phi \in \mathcal{M}$
(i) (iii)

(b) $A, B \in \mathcal{M} \underset{(iii)}{\Rightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{M} \overset{(ii)}{\Rightarrow} (A^c \cup B^c) \in \mathcal{M}$
$\underset{(iii)}{\Rightarrow} (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{M}$
$\Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$

(c) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ (Por (ii)) $\underset{(iii)}{\Rightarrow} (A \cap B)^c \in \mathcal{M}$
$A \cap B \in \mathcal{M}$ (Por (b))

Como $A \cup B$ y $(A \cap B)^c \in \mathcal{M}$

$\therefore \underbrace{\underbrace{(A \cup B) \cap (A \cap B)^c}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}}_{A \Delta B} \in \mathcal{M}$ (Por (b))

$\boxed{P10}$ Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea
$\mathcal{M} = \{ X \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \cap X = \phi \}$

Probar que:
(a) $\phi \in \mathcal{M}$ y $E \setminus A \in \mathcal{M}$
(b) $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A = \phi \Leftrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$
(c) $(\forall X \in \mathcal{M})(\forall Y \in \mathcal{P}(E))\; X \cap Y \in \mathcal{M}$.
(d) $(\forall X, Y \in \mathcal{M})\; X \Delta Y \in \mathcal{M}$.

Solución:

(a) Pdq $\phi \in \mathcal{M}$
$\phi \in \mathcal{P}(E)$ ✓ (Pues $\phi \subseteq E$) $\therefore \phi \in \mathcal{M}$
$A \cap \phi = \phi$ ✓

Pdq $E \setminus A \in \mathcal{M}$
$A^c = E \setminus A \in \mathcal{P}(E)$ ✓ (Pues $E \setminus A \subseteq E$) $\therefore E \setminus A \in \mathcal{M}$.
$A \cap \underbrace{(E \setminus A)}_{A^c} = \phi$ ✓

(b) Probemos que $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A = \phi$
$(\Rightarrow)$ $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap A = \phi \Rightarrow A = \phi$
$(\Leftarrow)$ $A = \phi \Rightarrow \underset{\phi}{A} \in \mathcal{M}$ Por parte (a)

Ahora probemos que $A = \phi \Leftrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$
$(\Rightarrow)$ $A = \phi \Rightarrow \mathcal{M} = \{ X \in \mathcal{P}(E) \,/\, \underbrace{\phi \cap X = \phi}_{\text{Siempre Verdad}} \} = \mathcal{P}(E)$

$(\Leftarrow)\ \mathcal{M}=\mathcal{P}(E) \Rightarrow (\text{como } E\subset\mathcal{P}(E) \Rightarrow E\in\mathcal{M})$
$\Rightarrow A\cap E=\phi \Rightarrow A=\phi$ ▨

Luego $A\in\mathcal{M} \Leftrightarrow A=\phi \Leftrightarrow \mathcal{M}=\mathcal{P}(E)$

(c) $X\in\mathcal{M} \Rightarrow \begin{cases} A\cap X=\phi \\ X\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X\subseteq E\end{cases}$ Luego $X\cap Y\subseteq E$ o sea $X\cap Y\in\mathcal{P}(E)$

$Y\in\mathcal{P}(E)\Leftrightarrow Y\subseteq E.$ y $A\cap(X\cap Y)=\underbrace{(A\cap X)}\cap Y = \phi\cap Y = \phi$

$\therefore X\cap Y\in\mathcal{M}$

(d) $(\forall X,Y\in\mathcal{M})$, $\underbrace{X,Y\in\mathcal{P}(E)}_{X,Y\subseteq E}$ y $A\cap X=A\cap Y=\phi$

Luego $X\Delta Y\subseteq E \Rightarrow X\Delta Y\in\mathcal{P}(E)$

y $A\cap(X\Delta Y)=A\cap((X\setminus Y)\cup(Y\setminus X))$
$=A\cap((X\cap Y^c)\cup(Y\cap X^c))$
$=\underbrace{(\underbrace{A\cap X}_{\phi}\cap Y^c)\cup(\underbrace{A\cap Y}_{\phi}\cap X^c)}_{\phi}=\phi$ ▨

P11 Sean $A,B,C\subseteq U$. Pruebe que:
(a) $(A\Delta B)\cup(B\Delta C)=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$
(b) $(A\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$ (Control 1, 2001)

Solución:
(a) Como $X\Delta Y=(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$, tenemos
$(A\Delta B)\cup(B\Delta C)=[(A\cup B)\setminus(A\cap B)]\cup[(B\cup C)\setminus(B\cap C)]$

$=[(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)]\cup[(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c)]$

Los distribuye (Todos con todos)

$=[(A\cup B)\cup(B\cup C)]\cap[\underbrace{(A\cup B)\cup(B^c\cup C^c)}_{U}]\cap[\underbrace{(A^c\cup B^c)\cup(B\cup C)}_{U}]$
$\cap[(A^c\cup B^c)\cup(B^c\cup C^c)]$

$=(A\cup B\cup C)\cap U\cap U\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$
$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$ ▨

(b) Primera forma:
Recordamos el P6](c) donde teníamos
$$(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\cup(C\triangle A)=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$$
pero por (a), tendríamos entonces que:
$$(A\triangle B)\cup(B\triangle C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\cup(C\triangle A)\ (*)$$
Así
$$\begin{aligned}(A\triangle C)&\subseteq[(A\triangle B)\cup(B\triangle C)]\cup(C\triangle A)\\&=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\end{aligned}$$
Por (*)

Pues $Y\subseteq X\cup Y$

Segunda forma:

los asocio
$$(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=A\triangle(B\triangle B)\triangle C=(A\triangle\phi)\triangle C=A\triangle C$$
Luego
$$\begin{aligned}A\triangle C&=(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)\\&=[(A\triangle B)\cup(B\triangle C)]\setminus[(A\triangle B)\cap(B\triangle C)]\\&\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\end{aligned}$$
Pues $X\setminus Y\subseteq X$

Tercera forma:
Por (a), $(A\triangle B)\cup(B\triangle C)=(A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)$
Pero
$$\begin{aligned}A\triangle C&=(A\cup C)\setminus(A\cap C)\\&=(A\cup C)\cap(A^c\cup C^c)\\&\subseteq(A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\&=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)\ \blacksquare\end{aligned}$$
Pues $(A\cup C)\subseteq(A\cup B\cup C)$ y $(A^c\cup C^c)\subseteq(A^c\cup B^c\cup C^c)$

P12 (a) Sea U conjunto universo. Sean A,B,W conjuntos tales que $(A\cap W)\subseteq(B\cap W)$ y $(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W^c)$.
Demuestre que $A\subseteq B$

(b) Sea U conjunto universo. Sean A,B conjuntos.
Demuestre que $[(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)=B]\Rightarrow[A=\phi]$

(Control 1, 2002)

Solución:
(a) Notemos que
$$(A\cap W)\cup(A\cap W^c)\subseteq(B\cap W)\cup(B\cap W^c)\ (*)$$
pues sabemos que si $M_1\subseteq N_1$ y $M_2\subseteq N_2$ tendremos que:
$$M_1\cup M_2\subseteq N_1\cup N_2$$
(En este caso $M_1=A\cap W$, $M_2=A\cap W^c$, $N_1=B\cap W$ y $N_2=B\cap W^c$)

Pero $(A\cap W)\cup(A\cap W^c) = A\cap(W\cup W^c) = A\cap U = A$
y $(B\cap W)\cup(B\cap W^c) = B\cap(W\cup W^c) = B\cap U = B$

Reemplazando en (*) tendremos que $A\subseteq B$

(b) Si recuerdan el P21 de esta guía se demuestra la equivalencia ($\Leftrightarrow$), pero aquí solo nos piden una implicancia, o sea el problema es el mismo y más fácil. Los alumnos que hicieron esta guía el año pasado tuvieron la ventaja de resolver de inmediato esta parte de la pregunta. ▨

Queridos Mechones:
Primero quiero felicitarlos por su esfuerzo, por confiar en esta serie de guías que lo único que buscan es ayudarlos en su estudio. Ciertamente son guías difíciles, con ejercicios en ocasiones más difíciles que los de prueba, pero eso mismo hace que estas guías les hagan comprender mucho mejor la materia. Los trucos que aquí aparecen les darán muchas armas para enfrentar sus pruebas que no serán nada de fáciles. No deben acenarse o decepcionarse porque en primera instancia no se les ocurran los problemas, muy por el contrario deben alegrarse de que ahora si saben resolverlo y que en la prueba no se llevarán ninguna sorpresa. No bajen los brazos, sigan trabajando duro, no se confíen y por sobre todo no pierdan estas semanas que tienen menos cosas que hacer, disfrútenlas pero a la vez aprovechenlas. Como anécdota les cuento que hace poco supe que algunos auxiliares de la Federico Santa María (de Valpo) estaban usando estas guías. Por último escribiré la dedicatoria del año pasado que tiene un valor muy grande para mí:

"La semana pasada para mí fue clave para entender que el poder de la mente tiene un techo, pero que el poder del Amor no tiene límites. ¿Que sentido tendría ser el mejor Matemático, Físico, Químico, etc... si no tuviéramos la capacidad de AMAR? Amen todo lo que tienen pues es muy difícil superar el perderlo, si así lo hacen descubrirán la verdadera felicidad".
Mucho más importante que los conocimientos son los sentimientos, no lo olviden...
Mucha Felicidad les desea David, MA1A-04 ▨