▶ Una demostración de la propiedad $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$

Como primer paso demostraremos que para todo conjunto A, B y C se tiene la igualdad

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\cap B\cap C)\cup[A\setminus(B\cup C)]\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)] \tag{1}$$

Esto último se puede ver paso a paso de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A\triangle(B\triangle C) &= [A\setminus(B\triangle C)]\cup[(B\triangle C)\setminus A]\\
&= [A\cap(B\triangle C)^c]\cup[(B\triangle C)\cap A^c]\\
&= [A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))^c]\cup[((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\cap A^c]\\
&= [A\cap(B\setminus C)^c\cap(C\setminus B)^c]\cup[(B\setminus C)\cap A^c]\cup[(C\setminus B)\cap A^c]\\
&= [A\cap(B\cap C^c)^c\cap(C\cap B^c)^c]\cup[(B\cap C^c)\cap A^c]\cup[(C\cap B^c)\cap A^c]\\
&= [A\cap(B^c\cup C)\cap(C^c\cup B)]\cup[B\cap(C^c\cap A^c)]\cup[C\cap(B^c\cap A^c)]\\
&= [((A\cap B^c)\cup(A\cap C))\cap(C^c\cup B)]\cup[B\cap(C\cup A)^c]\cup[C\cap(B\cup A)^c]\\
&= [(A\cap B^c)\cap(C^c\cup B)]\cup[(A\cap C)\cap(C^c\cup B)]\cup[B\setminus(C\cup A)]\cup[C\setminus(B\cup A)]\\
&= [(A\cap B^c\cap C^c)\cup\emptyset]\cup[\emptyset\cup(A\cap C\cap B)]\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\\
&= [A\cap(B^c\cap C^c)]\cup(A\cap C\cap B)\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\\
&= [A\cap(B\cup C)^c]\cup(A\cap C\cap B)\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\\
&= [A\setminus(B\cup C)]\cup(A\cap C\cap B)\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\,.
\end{aligned}$$

Ahora usaremos la igualdad (1) para demostrar la propiedad $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$. Comenzaremos por el lado derecho.

$$\begin{aligned}
(A\triangle B)\triangle C &= C\triangle(A\triangle B)\\
&= (C\cap A\cap B)\cup[C\setminus(A\cup B)]\cup[A\setminus(B\cup C)]\cup[B\setminus(A\cup C)]\\
&= (A\cap B\cap C)\cup[A\setminus(B\cup C)]\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\\
&= A\triangle(B\triangle C)
\end{aligned}$$

▶ Una demostración de la propiedad $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$

$$\begin{aligned}
(A\cap B)\triangle(A\cap C) &= [(A\cap B)\setminus(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\setminus(A\cap B)]\\
&= [(A\cap B)\cap(A\cap C)^c]\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)^c]\\
&= [(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)]\cup[(A\cap C)\cap(A^c\cup B^c)]\\
&= [\emptyset\cup(A\cap B\cap C^c)]\cup[\emptyset\cup(A\cap C\cap B^c)]\\
&= [A\cap(B\cap C^c)]\cup[A\cap(C\cap B^c)]\\
&= A\cap[(B\cap C^c)\cup(C\cap B^c)]\\
&= A\cap[(B\setminus C)\cup(C\setminus B)]\\
&= A\cap(B\triangle C)
\end{aligned}$$

▶ Una demostración de la propiedad $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Longleftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$

Dividimos la demostración en dos partes, dos implicancias para ser más preciso.
• Primero demostramos $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \longrightarrow A \times B \subseteq C \times D$.
Para esto asumimos $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$.
Fijemos $(a, b) \in A \times B$, entonces $a \in A$ y $b \in B$.

$$\left.\begin{array}{lcl} a \in A & \longrightarrow & a \in C \\ b \in B & \longrightarrow & b \in D \end{array}\right\} \longrightarrow (a, b) \in C \times D$$

Como (a, b) era arbitrario se concluye que $A \times B \subseteq C \times D$.
• Ahora demostraremos $A \times B \subseteq C \times D \longrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$
Para esto ahora asumimos $A \times B \subseteq C \times D$.
Sea $a \in A$ y $b \in B$.

$$\begin{aligned} a \in A \wedge b \in B &\Longleftrightarrow (a, b) \in A \times B \\ &\longrightarrow (a, b) \in C \times D \\ &\Longleftrightarrow a \in C \wedge b \in B. \end{aligned}$$

Como a es arbitrario se tiene $A \subseteq C$.
Como b es arbitrario se tiene $B \subseteq D$.

▶ Una demostración de la propiedad $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Consideremos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Longleftrightarrow (a, b) \in A \times B \wedge (a, b) \in C \times D \\ &\Longleftrightarrow a \in A \wedge b \in B \wedge a \in C \wedge b \in D \\ &\Longleftrightarrow a \in A \wedge a \in C \wedge b \in B \wedge b \in D \\ &\Longleftrightarrow a \in A \cap C \wedge b \in B \cap D \\ &\Longleftrightarrow (a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Como (a, b) puede ser cualquier par ordenado, se concluye la igualdad

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

▶ No siempre es cierto que $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

De hecho casi nunca es cierto. Por ejemplo si se toman algunos conjuntos bien sencillos, digamos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{1\} \\ C &= \{3, 4\} \\ D &= \{2\} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (A \times B) \cup (C \times D) &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \cup \{(3, 2), (4, 2)\} \\ &= \{(1, 1), (2, 1), (3,1), (3, 2), (4, 2)\}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B \cup D &= \{1, 2\} \\ (A \cup C) \times (B \cup D) &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Lo que sí es cierto siempre (y además es un interesante ejercicio para que el lector desarrolle por su cuenta) es

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$