Los mejores "datitos" para Teoría de Conjuntos,
Diferencia Simétrica

Introducción

Definitivamente, en la Teoría de Conjuntos, la Operación Top a mi parecer es la "Diferencia Simétrica," que ya varios deben conocer en sus dos versiones:

- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

De esta operación son claves los siguientes hechos:

Propiedad 1. $A \triangle \varnothing = \varnothing \triangle A = A$.

Esta propiedad nos indica que el conjunto vacío actúa como "neutro" (que no hace nada, que lo deja igual) para la operacion "triangulito," o sea que el vacío con A, o A con vacío, nos deja siempre A cuando los operamos con triangulito.

Propiedad 2. $A \triangle A = \varnothing$.

Esta propiedad nos dice que el conjunto A es "autoinvertible." Por ahora seguramente vaga idea tienen de lo que es eso, pero para que vayan intuyendo, sirve para echarse a la A, o a un conjunto cualquiera, cuando este a ambos lados de una igualdad. (Lo veremos a continuación en la Propiedad 4, así que no desesperarse con el lenguaje un poco raro.)

Propiedad 3. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Esta propiedad se llama "asociativa," y es otra ayuda más para poder fundamentar la propiedad mas importante con la que trabajarán, que será la Propiedad 4. (Básicamente las propiedades 1,2 y 3 son sólo para poder justificar formalmente la Propiedad 4.)

Propiedad 4. $A \triangle X = A \triangle Y \implies X = Y$.

Esta propiedad se llama cancelativa. Básicamente, en buen chileno, ustedes pueden echarse las A a ambos lados de una igualdad. (Se pueden echar las cosas repetidas, siempre y cuando esten operando con triangulito.)

Demostración.

$$\begin{array}{rcll}
A \triangle X & = & A \triangle Y & A \triangle (\;) \\
A \triangle (A \triangle X) & = & A \triangle (A \triangle Y) & \text{(aplicando Propiedad 3)} \\
(A \triangle A) \triangle X & = & (A \triangle A) \triangle Y & \text{(aplicando Propiedad 2)} \\
\varnothing \triangle X & = & \varnothing \triangle Y & \text{(aplicando Propiedad 1)} \\
X & = & Y \quad \blacksquare &
\end{array}$$

Pero la verdad bien poco se logra si no se ve a la famosa Propiedad 4 en acción, además de unirse a las otras 3 si es necesario, además de la propiedad básica $A \triangle B = B \triangle A$.

Así que ahora viene lo más interesante, y el objetivo final de este post de ayuda. (Imprescindible antes del control diría yo.)

Aplicaciones

Ejemplo 1. Probar que $B = A \triangle B \implies A = \varnothing$.

Solución. Notemos que la primera parte del implica se puede escribir como $B \triangle \varnothing = B \triangle A$ y si cancelamos las B como en la Propiedad 4, se obtiene lo pedido.

Por cierto esto responde la duda del Problema 8.4 posteado acá.

Ejemplo 2. Sea U el conjunto Universo. Sean A, B conjuntos.
Demuestre que $[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = B] \implies [A = \varnothing]$

Solución. Notamos que $A^c \cap B = B \cap A^c = B \setminus A$. Análogamente $A \cap B^c = A \setminus B$. Luego

$$\begin{aligned}(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) &= B \\ (B \setminus A) \cup (A \setminus B) &= B \\ A \triangle B &= B\end{aligned}$$

Luego aplicamos el Ejemplo 1, y estaríamos listos.

Ejemplo 3. Sea A un conjunto dado cualquiera.
Probar que $[A \cup X = A \cup Y \wedge A \cap X = A \cap Y] \implies X = Y$

Solución. En un ataque de lucidez (como puse en cierta Guía por ahí), nos acordamos de nuestro querido amigo "triangulito," y no dudamos un momento en usarlo, dado que vemos uniones e intersecciones. Notemos que

$$\begin{aligned}A \triangle X &= (A \cup X) \setminus (A \cap X) \\ &= (A \cup Y) \setminus (A \cap Y) \\ &= A \triangle Y\end{aligned}$$

Y como ya sabemos, si tenemos que $A \triangle X = A \triangle Y$, podemos "echarnos" las A, por la Propiedad 4, concluyendo lo pedido.

Y por último, uno de los problemas a mi parecer más simples y difíciles que he visto del tema, dentro del nivel que se esta intentando evaluar. (No ver la solución sin intentarlo hacer antes.)

Problema Extra. Probar que $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

Solución. Recordemos primero que $X \triangle Y \subseteq X \cup Y$. Así aplicando todo nuestro arsenal, más un poquito de creatividad, tendremos:

$$\begin{aligned}A \triangle B &= A \triangle \varnothing \triangle B \\ &= A \triangle C \triangle C \triangle B \\ &= (A \triangle C) \triangle (C \triangle B) \\ &\subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B) \\ &= (A \triangle C) \cup (B \triangle C)\end{aligned}$$

Todo esto de poner y sacar los paréntesis cuando yo quiera, se debe a que tenemos la propiedad asociativa, que nos permite hacer eso. (Puede probarse por inducción.)