Resolución Auxiliar 3

P1 Demostrar que

a) $(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c) = A^c\cup B$

En efecto, partamos de la izquierda

$$[(A\cap B)\cup(A^c\cap B)]\cup(A^c\cap B^c) \underset{①}{=} [B\cap(A\cup A^c)]\cup(A^c\cap B^c)$$

Tienen lo mismo "$\cap B$"

$$\underset{②}{=} [B\cap U]\cup(A^c\cap B^c)$$

$$\underset{③}{=} B \cup (A^c\cap B^c)$$

$$\underset{④}{=} (B\cup A^c)\cap(B\cup B^c)$$

$$\underset{⑤}{=} (B\cup A^c)\cap U$$

$$\underset{⑥}{=} A^c\cup B$$

Justificación

① Distribución
② $A\cup A^c = U$
③ $B\cap U = B$, pues $B\subseteq U$
④ Distribución
⑤ $B\cup B^c = U$
⑥ $(B\cup A^c)\cap U = B\cup A^c = A^c\cup B$

b) $B \subseteq A \wedge A \subseteq C \iff A \cup B = A \cap C$

Como hay una "$\iff$" debemos trabajar dos implicancias

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $B \subseteq A \wedge A \subseteq C$, debemos llegar a que $A \cup B = A \cap C$

En efecto, como $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$

por otro lado, como $A \subseteq C \Rightarrow A \cap C = A$

Luego $A \cup B = A = A \cap C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$ ∎

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $A \cup B = A \cap C$, debemos llegar a que $B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

Veamos que $B \subseteq A$, debemos tomar un elemento en B cualquiera y debemos concluir que este elemento esta en A.

En efecto, Sea $x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A$

$\iff x \in B \cup A$

$\iff x \in A \cap C$ pues $B \cup A = A \cap C$ ↑ Hipotesis

$\iff x \in A \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore\ x \in B \Rightarrow x \in A$, es decir, $B \subseteq A$

Ahora probemos que $A \subseteq C$.

De la misma forma, sea $x \in A$ arbitrario

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \quad \big) \; A \cup B = A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C \quad \big) \text{ en particular} \\ &\Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Luego $A \subseteq C$

$\therefore \quad B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B^c = B^c$

Debemos probar que $A \cup B^c = B^c$ usando de hipotesis que $A \cap B = \emptyset$ (pues usaremos exploratoria)

Procedamos por doble inclusión, es decir, en vez de probar $A \cup B^c = B^c$, probaremos $\underbrace{A \cup B^c \subseteq B^c}_{1} \wedge \underbrace{B^c \subseteq A \cup B^c}_{2}$

$\boxed{1}$ Sea $x \in A \cup B^c \Leftrightarrow \underset{(a)}{x \in A} \vee \underset{(b)}{x \in B^c}$

Estudiemos los dos casos

a) Si $x \in A$, dos casos $x \in B$ o $x \in B^c$
de esta forma $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, comprobar!

Sin embargo, $x \in A \cap B$ no tiene sentido pues $A \cap B = \emptyset$ por hipotesis, Luego $A = A \cap B^c$

Luego si $x \in A$, neceseriamente $x \in B^c$, es decir

$\Rightarrow$ $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

$\Rightarrow x \in B^c$ pues $A \cap B^c \subseteq B^c$

$\boxtimes$

Falta b), en este caso $x \in B^c$, es directo ya que $x \in B^c \Rightarrow x \in B^c$ $\boxtimes$

$\boxed{2}$ Sea $x \in B^c$, directo que $x \in B^c \cup A$ pues

$$B^c \subseteq \underbrace{B^c \cup A}_{\text{Es Más grande}}$$

Luego, como se cumple la doble implicancia la igualdad es cierta

d) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$

debemos probar la igualdad, empezemos por la izquierda

$$C \setminus (B \setminus A) = C \cap (B \cap A^c)^c \qquad A \setminus B = A \cap B^c$$
$$= C \cap (B^c \cup A)$$
$$= (C \cap B^c) \cup (C \cap A)$$
$$= (C \setminus B) \cup A \qquad A \subseteq C$$
$$= A \cup (C \setminus B)$$

$\boxed{P2}$ Demuestre que

a) $\emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$

Forma 1

En efecto, como $\emptyset \subseteq A \Rightarrow \emptyset \in P(A)$
y $\emptyset \subseteq B \Rightarrow \emptyset \in P(B)$

Luego como $P(A) \setminus P(B) = \{X, X \in P(A) \land X \notin P(B)\}$
y como $\emptyset \in P(A)$ y $\emptyset \in P(B) \Rightarrow \emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$

Forma 2

Por contradicción, supongamos que $\emptyset \in P(A) \setminus P(B)$
$\Rightarrow \emptyset \in P(A) \land \emptyset \notin P(B) \Rightarrow \emptyset \not\subseteq B$; pero $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto, en particular $\emptyset \subseteq B$, por lo que es una contradicción $\Rightarrow\Leftarrow$

b) $P(A \setminus B) \subseteq (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

Sea $X \in P(A \setminus B) \Rightarrow X \subseteq A \setminus B$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \not\subseteq B$

$\Rightarrow X \in P(A) \wedge X \notin P(B)$

¿Esto basta? No! ya que X puede ser vacío.

Como $\emptyset \in P(A \setminus B)$, pues $\emptyset \subseteq A \setminus B$ y por la parte anterior $\emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$ Luego debo agregarlo $\Rightarrow \emptyset \in (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

La igualdad no se da por ejemplo considerando

$A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$

$\Rightarrow A \setminus B = \{a\} \Rightarrow P(A \setminus B) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$\Rightarrow P(A) \setminus P(B) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$\Rightarrow P(A \setminus B) \neq P(A) \setminus P(B) \cup \{\emptyset\}$

pues $\{a, b\} \notin P(A \setminus B)$

P3 $\forall X, Y \subseteq U$ con A fijo se tiene que

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

Debemos probar la igualdad, recurrimos a la doble inclusión

$\boxed{X \subseteq Y}$ Sea $X, Y \subseteq U$ arbitrarios

Sea $x_0 \in X$ arbitrario,

$x_0 \in X \Rightarrow x_0 \in X \cup A$

$\Leftrightarrow x_0 \in Y \cup A$ pues $X \cup A = Y \cup A$

$\Rightarrow \underset{1}{x_0 \in Y} \vee \underset{2}{x_0 \in A}$ (dos casos)

1 Si $x_0 \in Y$ estamos Listos ✓ ☑
Pues partí de $x_0 \in X$ y llegué a $x_0 \in Y$

2 Si $x_0 \in A$, ya sabemos que $x_0 \in X$

$\Rightarrow x_0 \in X \cap A \Leftrightarrow x_0 \in Y \cap A$ pues $X \cap A = Y \cap A$

$\Rightarrow x_0 \in Y \wedge x_0 \in A$

$\Rightarrow x_0 \in Y$ ✓ ☑

$\therefore X \subseteq Y$

$\boxed{Y \subseteq X}$ Analogo, sea $X, Y \subseteq U$ arbitrarios

Sea $y_0 \in Y \Rightarrow y_0 \in Y \cup A$

$\Leftrightarrow y_0 \in X \cup A$

$\Leftrightarrow \underbrace{y_0 \in X}_{①} \vee \underbrace{y_0 \in A}_{②}$

① Directo, empezamos con $y_0 \in Y$ llegamos a $y_0 \in X$

② $y_0 \in A \Rightarrow y_0 \in Y \cap A$

$\Leftrightarrow y_0 \in X \cap A$

$\Leftrightarrow y_0 \in X \wedge y_0 \in A$

$\Rightarrow y_0 \in X$

Luego $Y \subseteq X$

$\therefore X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow Y = X$ $\boxtimes$