3. **P3:** tableros y triominos

a) Demuestre que para todo $n \geq 1$, y para todo $i, j \in \{1, \ldots, 2^n\}$, es posible encontrar una (i,j)-solución de $T(n)$.
En efecto, procederemos por induccion.

- (n=1) en este caso se tiene un cuadrado de 2×2, por inspección podemos ver que existe una solucion para cada $i, j \in \{1, \ldots, 2^n\}$

a) $i=j=1$		b) $i=1, j=2$	
0	1	1	0
1	1	1	1
c) $i=2, j=1$		d) $i=j=2$	
1	1	1	1
0	1	1	0

Cuadro 1: (i,j)-solucion de $T(n=1)$

- Probaremos para $n \in N$ arbitrario suponiendo que la proposición es cierta para $n-1$. Tenemos un tablero de $2^n \times 2^n$, este tablero se dividira en 4 tableros de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $i, j \leq 2^{n-1}$ luego pondremos el primer triomino cuya representacion sera con el numero 1 en las casillas $(2^{n-1}, 2^{n-1}+1), (2^{n-1}+1, 2^{n-1}), (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+1)$ como se ve en la siguiente figura.

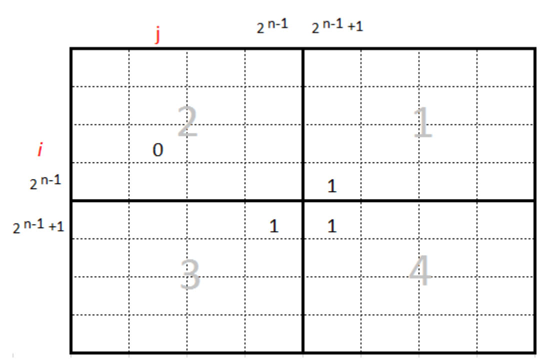

Figura 1: Matriz dividida en 4 sub-matrices

En donde a cada sub-matriz se la asigno un número correspondiente al cuadrante en el que estaba. Finalmente lo que haremos ocupar la hipotesis inductiva en cada sub-matriz, de este modo se tiene lo siguiente:

1) para la sub-matriz 2, se usará la hipotesis de inducción sobre i y j correspondiente a la matriz de $2^n \times 2^n$

2) para la sub-matriz 1, se usará la hipotesis de inducción sobre $i = 2^{n-1}$ y $j = 2^{n-1} + 1$
3) para la sub-matriz 3, se usará la hipotesis de inducción sobre $i = 2^{n-1} + 1$ y $j = 2^{n-1}$
4) para la sub-matriz 4, se usará la hipotesis de inducción sobre $i = 2^{n-1}+1$ y $j = 2^{n-1}+1$

Luego, para cada sub-matriz se tiene una solución, lo que juntas, constituye la solución para la matriz de $2^n \times 2^n$. Es decir, encontramos una (i, j)-solución de T(n), con n arbitrario. Por lo tanto la proposición es verdadera. Cabe destacar que la ubicación de (i, j) es irrelevante, esto pues se puede repetir el mismo proceso de dividir la matriz en 4 submatrices y luego poner el primer triomino tal que no intersecte a la sub matriz que contiene al par (i, j)