

P1) a) $\exists m \in \mathbb{Z} \frac{m-7}{2m+4} = 5$

Debemos encontrar un "m" que sea entero, tal que si lo reemplazamos en la proposición, la igualdad se satisface.

Propongo $m = -3$, entonces

$$\frac{-3-7}{2(-3)+4} = \frac{-10}{-6+4} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Luego $m = -3$ satisface la igualdad, por lo que

$$\exists m \in \mathbb{Z}, \frac{m-7}{2m+4} = 5 \text{ es } \nabla.$$

Nota: el valor a proponer lo pueden calcular despejando m, pero este desarrollo no es relevante para la demostración.

b) $\forall n \in \mathbb{N} [n \text{ es par} \Leftrightarrow n^2 \text{ es par}]$

Como hay un " $\forall$ " debemos trabajar con elementos arbitrarios y Como hay " $\Leftrightarrow$ " lo Separaremos en 2 implicaciones

$\Rightarrow$ Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, t.q. n es par
(Asumimos hipótesis). Como n es par
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.q. $n = 2k$

Luego $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$ lo cual es par

$\therefore n^2$ es par

$\Leftarrow$ TAREA

Probar por contradicción

$\hookrightarrow$ Asumir que n^2 es par y n es impar

$\hookrightarrow$ Estudiar n^2 si n es impar $\square$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}$ n es par $\Leftrightarrow n^2$ es par

P2) a) $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6

CB ($n_0 = 1$): si $n = 1$

$$\Rightarrow 1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5$$

$= 6$ ✓ el cual es
divisible por 6

HI: La proposición es verdadera para
algun número natural " k " mayor o
igual que el caso base

ES DECIR

! $(\exists k \geq n_0) k^3 + 5k$ es múltiplo de 6

$$\Leftrightarrow k^3 + 5k = 6p, \text{ con } p \in \mathbb{N}$$

Paso
Inductivo: Probemos que para $k+1$, la
proposición también es cierta

$$\Rightarrow (k+1)^3 + 5(k+1)$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$$

$$= (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6$$

$$\stackrel{(HI)}{=} 6p + 3k(k+1) + 6$$

$$= 6p + 6 + \underbrace{3k(k+1)}_{\text{es par } (*)}$$

$$= 6(p+1) + 3 \cdot (2q)$$

$q \in \mathbb{N}$

$$= 6(p+1) + 6q$$

$$= 6(p+1+q)$$

Lo cual es divisible por 6 $\square$

obs: $k(k+1)$ es par ya que
 Si multiplican un número por su
 sucesor, uno de los obs será par.
 TAMBIEN se puede demostrar por
 inducción

$$b) \quad 13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$$

$$(CB \ n_0=0): \quad 4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{0+2}$$

$$= 4 + 3^2$$

$$= 4 + 9$$

$$= 13$$

✓ Divisible per 13

$$(HI): \quad \exists n \geq n_0 \quad \text{tg} \quad 4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13p$$

for $p \in \mathbb{N}$

$$(PI): \quad 4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2}$$

$$= 4^{2n+3} + 3^{n+3}$$

$$= 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2}$$

$$= 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2}$$

$$= (13+3) 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2}$$

$$= 13 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2}$$

$$= 13 \cdot 4^{2n+1} + 3 \underbrace{(4^{2n+1} + 3^{n+2})}_{HI}$$

$$16 = 13 + 3$$

$$= 13 \cdot 4^{2n+1} + 3(13p)$$

$$= 13 \underbrace{(4^{2n+1} + 3)}_{\in \mathbb{N}}$$

$\therefore$ es divisible por 13 y la inducción se completa

P3) 1) Buscar n_0 en $3n+2 < 2^n$

$$n=1 \quad 3+2 < 2 \quad \times$$

$$n=2 \quad 6+2 < 4 \quad \times$$

$$n=3 \quad 9+2 < 8 \quad \times$$

$$n=4 \quad 12+2 < 16 \quad \checkmark$$

Luego $n_0 = 4$

2) Problemas por Inducción

$$(CB \quad n_0=4): \quad 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2$$

$$= 14$$

$$< 16 = 2^4 \quad \checkmark$$

$$(HI) (\exists n \geq n_0) \text{ tal que } 3n+2 < 2^n, n \in \mathbb{N}$$

$$(PI) \text{ Probemos que } 3(n+1)+2 < 2^{n+1}$$

DEBEMOS LLEGAR DE UN LADO
A OTRO !!

Empezemos de la izq

$$3(n+1)+2 = 3n+3+2$$

$$= \underbrace{3n+2}_{HI} + 3$$

$$< 2^n + 3$$

$$< 2^n + 2^n$$

$$= 2 \cdot 2^n$$

$$= 2^{n+1}$$

Puedo hacerlo
Pues por ej:
 $2+5 < 10+5$
en donde
 $2 < 10$

$$3 < 2^n$$

Pues $n \geq 4$
 $\Rightarrow$ en el peor
caso
 $3 < 16 \checkmark$

$\therefore$ se cumple $\forall n$ la proposición

P4 $T_n = 5T_{n-1} - 4T_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

$$T_1 = 3, \quad T_2 = 15$$

a) $T_3 = 5T_2 - 4T_1$

$$= 5 \cdot 15 - 4 \cdot 3 = 75 - 12 = 63$$

b) $T_4 = 5T_3 - 4T_2 = 5 \cdot 63 - 4 \cdot 15$
 $= 255$

$$T_5 = 5T_4 - 4T_3 = 5 \cdot 255 - 4 \cdot 63$$
$$= 1023$$

$\Rightarrow$

$T_1 = 3$	}	Conjecture $T_n = 2^n - 1$
$T_2 = 15$		
$T_3 = 63$		
$T_4 = 255$		
$T_5 = 1023$		

0) p.d.g: $\forall n \geq 1 \quad T_n = 4^n - 1$

CB $n_0 = 1, n_1 = 2$

$$n_0 = 1 \Rightarrow 4^1 - 1 = 3 = T_1 \quad \checkmark$$

$$n_0 = 2 \Rightarrow 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = T_2 \quad \checkmark$$

$\therefore$ Se cumple caso base

HI: $T_n = 4^n - 1 \Leftrightarrow V$ para todo $n_0, n_0+1, \dots, n$
para algun $n \in \mathbb{N}$

PI: Probar que $T_{n+1} = 4^{n+1} - 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{n+1} &= 5T_n - 4T_{n-1} \\ &= 5(4^n - 1) - 4(4^{n-1} - 1) \\ &= 5 \cdot 4^n - 5 - 4^n + 4 \\ &= 4 \cdot 4^n - 1 \\ &= 4^{n+1} - 1 \quad \square \end{aligned}$$

$\therefore$ la proposición es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

PS

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \forall n \geq 1$$

Pdgs: $1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

(CB: $n_0 = 2$): $f_1^2 + f_2^2 = 1 \cdot 1$

$$= 1^2$$

$$= f_1^2 \quad \checkmark$$

HI: $\exists k \in \mathbb{N} \quad k \geq n_0 \quad +_g \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$

PI: $\text{Pdgs} \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$

En efecto,

$$\begin{aligned} & 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + f_k^2 + f_{k+1}^2 \\ &= (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + f_k^2) + f_{k+1}^2 \end{aligned}$$

HI $\geq$ $f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2$

$$= f_{k+1} (f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2} \quad \square$$

Definición