

Pauta Aux #1

P1 Se define $p * q$ como

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

obs: A simple vista se nota que es la negación de "v"

a) $p \vee q \mid$ ① $\neg p \Leftrightarrow (p * p)$ y que ② $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p * q)$

Dem: partamos con ②, lo haremos usando tablas de verdad, neguemos $(p * q)$

p	q	$p \vee q$	$p * q$	$\neg(p * q)$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F



Como tienen la misma tabla de verdad, "En el mismo orden" (se debe respetar las instancias cuando p es V o F, y cuando q es V o F)

Luego $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p * q)$.

Ahora usemos esto para demostrar ①, Como tenemos una relación entre " $*$ y $\vee$ " es directo notar que si tenemos

$$(p * p) \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow \neg p \quad \text{demostrando lo pedido}$$

Lo demostramos

 $p \vee p \Leftrightarrow p$
 TAUTOLOGIA

b) Expresar $(P \Rightarrow Q)$ y $(P \wedge Q)$ con $*$ y $\sim$

$$\textcircled{1} (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \sim (\sim P * Q)$$

/ Pasos /
Caract del implica

$$P \vee Q \Leftrightarrow \sim (P * Q)$$

$$\textcircled{2} P \wedge Q \Leftrightarrow \sim [(\sim P) \vee (\sim Q)]$$

$$\Leftrightarrow \sim [\sim (\sim P * \sim Q)]$$

$$\Leftrightarrow \sim P * \sim Q$$

De Morgan

$$P \vee Q \Leftrightarrow \sim (P * Q)$$

doble negación

P2 determinar P, Q, r, s, t si

$$\{[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (\overline{r \Rightarrow s}) \wedge \overline{t}] \Rightarrow [s \vee (Q \Rightarrow s)]\} \Leftrightarrow F$$

R: Podemos notar que la proposición es una implicancia, luego ¿Cuándo una implicancia es Falsa?

Cuando la hipótesis es V y la conclusión F

luego, si $\{[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (\overline{r \Rightarrow s}) \wedge \overline{t}] \Rightarrow [s \vee (Q \Rightarrow s)]\} \Leftrightarrow F$

$$\Rightarrow \textcircled{1} (P \Leftrightarrow Q \wedge (\overline{r \Rightarrow s}) \wedge \overline{t}) \Leftrightarrow V$$

$$\wedge \textcircled{2} (s \vee (Q \Rightarrow s)) \Leftrightarrow F$$

de $\textcircled{2}$ se concluye que $s \Leftrightarrow F$ y $(Q \Rightarrow s) \Leftrightarrow F$.
Pues hay una disyunción (" $\vee$ "), luego como $s \Leftrightarrow F$
se concluye que $Q \Leftrightarrow V$

de ① Como hay solo Conjunciones, Cada proposición vinculada con "∧" debe ser V

$$\Rightarrow a) (p \wedge q) \Leftrightarrow V$$

$$b) \overline{r \Rightarrow s} \Leftrightarrow V$$

$$c) \bar{t} \Leftrightarrow V$$

de c), como $(\bar{t} \Leftrightarrow V) \Rightarrow (t \Leftrightarrow F)$

de b), como $(\overline{r \Rightarrow s} \Leftrightarrow V)$, entonces $(r \Rightarrow s) \Leftrightarrow F$,
luego $r \Leftrightarrow V$

de a) Como $(p \wedge q) \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow V$
Se concluye que $p \Leftrightarrow V$.

$$\therefore p \Leftrightarrow V$$

$$q \Leftrightarrow V$$

$$r \Leftrightarrow V$$

$$s \Leftrightarrow F$$

$$t \Leftrightarrow F$$

P3) Demuestre sin tablas de verdad

$$a) [(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$$

Metodo exploratorio:

Cuando tenemos algo del estilo $A \Rightarrow B$,
si $A \Leftrightarrow F$, trivialmente $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow V$.

Por lo que solo nos interesa cuando la
hipotesis es verdadera.

Entonces, el metodo exploratorio se reduce
a que en los casos $A \Rightarrow B$, Asumamos
hipotesis verdadera, es decir, $A \Leftrightarrow V$ y con
la info que nos da esto, LLEGAR A QUE
 $B \Leftrightarrow V$

Dem: En efecto; Supongamos que

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow V$$

Que queremos
probar

Hipotesis

Luego, como son conjunciones,

$$① p \Rightarrow \bar{q} \Leftrightarrow V$$

$$\wedge ② \bar{r} \vee q \Leftrightarrow V$$

$$\wedge ③ r \Leftrightarrow V$$

Ocupando ③ en ② se obtiene que $q \Leftrightarrow V \rightarrow ④$
" ④ en ① " " " que $p \Leftrightarrow F$

Finalmente Como $P \Leftrightarrow F$, se tiene que

$$\overline{P} \Leftrightarrow V$$

Conclusión

Que era lo que queriamos probar

b) $[(P \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (P \Rightarrow \overline{r})$

Metodo Algebraico/Simbolico:

Mediante tautologias, se debe llegar a que la proposición es V , es decir, hay que reducir la expresión, por ejemplo,

$(P \Rightarrow q)$ lo podemos cambiar por $(\neg P \vee q)$ pues son equivalentes

Dem: $[(P \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (P \Rightarrow \overline{r})$

$$\Leftrightarrow \overline{[(P \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)]} \vee (P \Rightarrow \overline{r})$$

/Pasos/

• Caract. del implica

$$\Leftrightarrow \overline{[(P \Rightarrow \overline{q}) \vee (r \Rightarrow q)]} \vee \overline{P} \vee \overline{r}$$

• De Morgan / caract implica

$$\Leftrightarrow \overline{[(P \wedge \overline{\overline{q}}) \vee (r \wedge \overline{\overline{q}})]} \vee \overline{P} \vee \overline{r}$$

• Absurdo (negar implica)

$$\Leftrightarrow (P \wedge q) \vee (r \wedge \overline{q}) \vee \overline{P} \vee \overline{r}$$

• doble negacion

$$\Rightarrow [(p \wedge q) \vee \bar{p}] \vee [(r \wedge \bar{q}) \vee \bar{r}]$$

• Asociatividad y Comutatividad

$$\Rightarrow [(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{p})] \vee [(r \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})]$$

• Distribución

$$\Rightarrow [\underbrace{\bar{V}} \wedge (q \vee \bar{p})] \vee [\underbrace{\bar{V}} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})]$$

• Tautología
 $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$

$$\Rightarrow (q \vee \bar{p}) \vee (\bar{q} \vee \bar{r})$$

• tautología
 $p \wedge V \Leftrightarrow p$

$$\Rightarrow (q \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee \bar{r})$$

• Conmuto + Asocio

$$\Rightarrow \underbrace{V} \vee (\bar{p} \vee \bar{r})$$

• tautología

$$\Rightarrow V$$

• tautología

∴ Si es tautología

obs: SIEMPRE SE DEBE CONCLUIR

$$c) [(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s))$$

/ Metodo de Contradicción:

En el caso de $A \Rightarrow B$, se parte suponiendo que $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow F$ y se trata de llegar a algo que hace explotar la proposición o a la matemática.

Como se Asume que $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow F$,
Los datos a utilizar son que $A \Leftrightarrow V$
y $B \Leftrightarrow F$

Dem: Supongamos, en busca de una contradicción que la proposición es falsa, es decir,

$$① (p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow V$$

$$\text{y } ② \bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s) \Leftrightarrow F$$

de ② Como hay puros " $\vee$ " y es Falsa la proposición se tiene que

$$a) \bar{p} \Leftrightarrow F \Rightarrow p \Leftrightarrow V$$

$$b) \bar{r} \Leftrightarrow F \Rightarrow r \Leftrightarrow V$$

$$c) (q \wedge s) \Leftrightarrow F \text{ } \} \text{ ojo con esto!}$$

de ① Como hay un "1" se tiene que

$$d) p \Rightarrow q \Leftrightarrow V$$

$$y e) \bar{s} \Rightarrow \bar{r} \Leftrightarrow V$$

Como $p \Leftrightarrow V$, reemplazamos su valor en (d)

Luego queda $\underbrace{p}_{V} \Rightarrow q \Leftrightarrow V$, por lo que

necesariamente $q \Leftrightarrow V$.

Por otro lado, como $\bar{r} \Rightarrow F$ lo podemos reemplazar en (e)

$$\bar{s} \Rightarrow \underbrace{\bar{r}}_F \Leftrightarrow V$$

Luego, necesariamente $\bar{s} \Leftrightarrow F$, entonces
 $s \Leftrightarrow V$

Luego como $s \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow V$

$$\Rightarrow p \wedge s \Leftrightarrow V$$

~~$\Rightarrow$~~
Contradicción

! Que?!! Pero si:
(c) me dice
que $(p \wedge s) \Leftrightarrow F$

$\therefore [(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]$ es
tautología

P4) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) "Hay un elemento en A, que es mayor que el resto"

$$\hookrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in A \setminus \{x\}) x > y \Leftrightarrow \forall \text{ tomando } x=6$$

Neg: $(\forall x \in A)(\exists y \in A \setminus \{x\}) x \leq y$

b) "Existe un unico elemento en A cuyo cuadrado es 4"

$$\hookrightarrow (\exists! x \in A) x^2 = 4 \Leftrightarrow \forall, \text{ solo el 2 funciona}$$

Neg: $\neg [(\exists! x \in A) x^2 = 4]$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A, x^2 = 4) \wedge [(\forall x, x' \in A) x^2 = 4 \wedge (x')^2 = 4 \Rightarrow x = x']$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A, x^2 = 4) \vee [(\forall x, x' \in A) x^2 = 4 \wedge (x')^2 = 4 \Rightarrow x = x']$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A, x^2 \neq 4) \vee [\forall x, x' \in A x^2 = 4 \wedge (x')^2 = 4 \wedge x' \neq x]$$

Revisar apunte Pag 19. Aqui sale como es el cuantificado $\exists!$ respecto a $\exists, \forall$

c) "Para cada elemento en A , existe otro en A que es menor o igual que él"

$(\forall x \in A) ((\exists y \in A) x \geq y) \Leftrightarrow \forall, \text{ puedo tomar siempre } x=y.$

obs: puede ser disjuntible el segundo cuantificado
 $(\exists y \in A) \text{ o } (\exists y \in A \setminus \{x\})$

Neg: $(\exists x \in A) (\forall y \in A) x < y$

d) "Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo"

$(\exists x \in A) x^2 = x \Leftrightarrow \forall, x=1 \text{ por ejemplo}$

Neg: $(\forall x \in A) x^2 \neq x$

PS] a) Datos: $\phi(x, y) = "x \text{ esta más adelante que } y \text{ en la fila}"$

• $p \in F$, F es la fila

$$a) (\forall x \in F) [\phi(x, p) \vee (x = p)]$$

- Esto quiere decir que: "toda persona x en la fila, se encuentra delante de p o la persona x es en realidad p ".
- Luego esta proposición es cierta si: p es el último de la fila"

$$b) (\exists! x \in F) [\phi(x, p) \vee \phi(p, x)]$$

- Esto quiere decir que: "hay una sola persona x que esta adelante de la persona p , o, la persona x se encuentra atrás de p ".
- La proposición es cierta cuando solo hay 2 personas en la fila, la persona p y otra más, es decir, $F = \{p, x\}$. Esto debido a que si hay 3 o más personas no se va a respetar la unicidad, es decir, no se respeta el " $\exists!$ ".

P6) P.D.Q) $(\exists y) [p(y) \Rightarrow (\forall x) p(x)]$ es tautología

En efecto, trabajemos una expresión equivalente

$$(\exists y) [p(y) \Rightarrow \forall x p(x)] \Leftrightarrow (\exists y) [(\overline{\forall x p(x)}) \Rightarrow \overline{p(y)}]$$

Contr. recíproca

$$\Leftrightarrow (\exists y) [\overbrace{\exists x \overline{p(x)} \Rightarrow \overline{p(y)}}^{\text{Implicancia}}]$$

Luego podemos ponernos en 2 casos, (Método de exploración) uno "trivial" y el otro a estudiar

$(1) (\exists x \overline{p(x)}) \Leftrightarrow V$	$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ En algún momento} \\ \text{no se cumple la proposición} \\ p(x) \\ (2) p(x) \text{ siempre se} \\ \text{cumple} \end{array} \right.$
$(2) (\exists x \overline{p(x)}) \Leftrightarrow F$	
$\Downarrow$ $(\forall x p(x)) \Leftrightarrow V$	

En el caso (1), Como sabemos que $\exists x \overline{p(x)} \Leftrightarrow V$
llamemos x_* al valor de x que hace esto
posible, luego basta tomar $y = x_*$ y
si tiene la existencia del y $(\exists y)$ y la
implicancia queda $\exists x \overline{p(x)} \Rightarrow \overline{p(y)}$
 $V \Rightarrow V \Leftrightarrow V$

Luego el caso 2, si $\exists x \overline{p(x)} \Leftrightarrow F$ la proposición queda

$$(\exists y) (\underbrace{\exists x \overline{p(x)}}_{\text{falso}} \Rightarrow \overline{p(y)})$$

$$(\exists y) (F \Rightarrow \overline{p(y)})$$

$\Leftrightarrow \bigvee$, pues cuando

la hipótesis es falsa, la implicación es trivialmente verdadera

Dudas por U-Cursos o a mi mail

marcelo.navarro@ing.uctile.cl