Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-3 Cálculo diferencial e integral
15 de Junio de 2017

Auxiliar extra: Preparación Control 3

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Camila Fernández

$\boxed{\text{P1}}$ Considere la función $f : R \to (0, \infty)$, dos veces derivable en R y tal que $\text{máx}\{f(x) : x \in R\} = f(1)$. Se define $g : R \to R$ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_1^{x^2} f(t)dt}{\displaystyle\int_1^{x} f(t)dt} & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

a) Demuestre que g es continua en $R - \{1\}$.

b) Determine el valor de α para que g sea continua en $x = 1$.

c) Calcule $g'(1)$.

$\boxed{\text{P2}}$ a) Demuestre que $\forall a > 1$ la integral $\displaystyle\int a^{-x}dx$ converge.

b) Sea $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ una función continua tal que

$$\exists \lim_{x\to\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} < 1$$

Demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. Concluya que $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.
Hint: Observe que si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) < 1$, entonces $\exists\ a > 1$ tal que $g(x) \leq \frac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

$\boxed{\text{P3}}$ Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \quad donde \quad f(x) = \frac{(x - [x])^x}{x + 1}$$

Realice lo siguiente:

a) Pruebe que para todo $n \in N$, f se acota del modo siguiente

$$0 \leq f(x) \leq \frac{(x - n)^n}{n + 1} \quad \forall x \in [n, n + 1)$$

b) Pruebe que para todo $n \in N$,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \frac{1}{(n + 1)^2}$$

c) Si llamamos $\{s_n\}$ a la sucesión definida por $s_n = \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)dx$. Pruebe que $\{s_n\}$ es convergente.

d) Concluya que la integral impropia es convergente. Es decir, relacione la variable discreta $n \in N$ con la variable continua $b \in R$ que aparece en la definición de la integral impropia:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} f(x)dx.$$