MA1001-01 Introducción al Cálculo
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"Frase genérica" - Autor genérico

Resumen ecuaciones: Cónicas

- **Rectas:** Dados dos puntos o un punto y pendiente es posible determinar la ecuación de la recta. La forma principal es
$$y = mx + n$$
donde m es la pendiente de la recta y n es el punto de intersección con el eje OY.

  Dos rectas se dirán *paralelas* si sus pendientes son iguales.
  Dos rectas se dirán *perpendiculares* si la multiplicación de sus pendientes es -1.

- **Circunferencia:** Una circunferencia es de la forma
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
donde (x_0, y_0) es el centro y r es el radio.

  Dados 3 puntos es posible determinar una circunferencia.

- **Parábola:** Corresponde al caso de una cónica con excentricidad $e = 1$. Existen de dos tipos, verticales u horizontales:

  1. Vertical: Es de la forma
  $$(y - y_0) = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$$
  donde (x_0, y_0) es el vértice, $F = (x_0, y_0 + p)$ es el foco y $D : y = y_0 - p$ es la recta directriz (notar que es una recta horizontal, un dibujo puede ayudar).

  2. Horizontal: Es de la forma
  $$(x - x_0) = \frac{1}{4p}(y - y_0)^2$$
  donde (x_0, y_0) es el vértice, $F = (x_0 + p, y_0)$ es el foco y $D : x = x_0 - p$ es la recta directriz (notar que es una recta vertical).

- **Elipse:** Corresponde al caso de una cónica con excentricidad $e < 1$. Su ecuación general es de la forma
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$$
donde (x_0, y_0) es el centro de la elipse. Acá volvemos a tener 2 casos:

  1. Horizontal: Esto ocurre cuando $a > b$. Se cumple que $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ es la excentricidad, $F = (x_0 \pm ae, y_0)$ son sus focos y $D : x = x_0 \pm \frac{a}{e}$ son las rectas directrices (notar que estas rectas son verticales).

2. Vertical: Esto ocurre cuando $b > a$. Se cumple que $e = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ es la excentricidad, $F = (x_0, y_0 \pm be)$ son sus focos y $D : y = y_0 \pm \frac{b}{e}$ son las rectas directrices (notar que estas rectas son verticales).

Las elipses cumplen con una propiedad de conservación: Sea $P = (x_e, y_e)$ un punto cualquiera de la elipse y F_1, F_2 sus focos, entonces $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, la suma de distancias es siempre constante e igual a a. (esto en el caso horizontal. En el caso vertical es cosa de cambiar a por b).

- **Hipérbola:** Corresponde al caso de una cónica con excentricidad $e > 1$. Acá también identificamos dos casos:

1. Horizontal: Es de la forma
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$
donde (x_0, y_0) es el centro, $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ es la excentricidad, $F = (x_0 \pm ae, y_0)$ son los focos y $D : x = x_0 \pm \frac{a}{e}$ son las directrices.

2. Vertical: Es de la forma
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$
donde (x_0, y_0) es el centro, $e = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$ es la excentricidad, $F = (x_0, y_0 \pm be)$ son los focos y $D : y = y_0 \pm \frac{b}{e}$ son las directrices.

Las asíntotas de toda hipérbola son de la forma $(y-y_0) = \pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ (Notar que son dos asíntotas). Recordar que una asíntota es una recta que, cuando alguna variable es muy grande, se parece mucho a la hipérbola pero no alcanza a tocarla

Acá también hay una propiedad de conservación: Sea $P = (x_h, y_h)$ un punto de la hipérbola horizontal, F_1 el foco a la izquierda y F_2 es foco a la derecha, entonces $f(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.

Es importante destacar que en todo el proceso para llegar a la expresión matemática de una cónica es fundamental conocer el método de completación de cuadrados, es decir, si ven cosas al cuadrado traten de formar un binomio al cuadrado, incluso aunque les quede algo como $(x-0)^2$, de esta manera es más fácil identificar los elementos pertinentes a la cónica.