Clase auxiliar 9 - Macroeconomía
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Universidad de Chile

Ronald Leblebici Garo

5 de junio de 2017

Antes de imprimir esta presentación, piense si es realmente necesario.

1. Resumen y demostraciones (P1)
2. Un poco de elasticidad (P2)
3. Solow creativo (P3)

Introducción de variables

- $K(t)$: capital agregado (total) de una nación [$].
- $L(t)$: fuerza de trabajo.
- $A(t)$: efectividad. Su significado varía según el modelo para la producción.

¿Cómo varía la producción en el tiempo?

Existen distintos modelos:

- $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ (Harrod neutral)
- $Y(t) = F(A(t)K(t), L(t))$
- $Y(t) = A(t)F(K(t), L(t))$ (Hicks neutral)

El modelo de Solow utiliza una función de producción Harrod Neutral. En ese caso $A(t)$ es la efectividad del trabajo.

Supuesto: retornos constantes a escala

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ y $c \in \mathbb{R}$.

Una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tiene **retornos constantes a escala** si:

$$f(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot f(\mathbf{x})$$

En nuestro modelo supondremos que la función de producción F cumple esta propiedad. Es decir:

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL)$$

Una función que cumple esta propiedad es la Cobb-Douglas:

$$F(K, A \cdot L) = K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}$$

Problema 1.A

PDQ: La función Cobb-Douglas tiene economías constantes a escala.

Función Cobb-Douglas: $F(K, A \cdot L) = K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}$.

$$F(c \cdot K, c \cdot A \cdot L) = (c \cdot K)^{\alpha} \cdot (c \cdot A \cdot L)^{1-\alpha}$$

$$= c^{\alpha} \cdot c^{1-\alpha} \cdot K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}$$

$$= c \cdot K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha} \quad \square$$

Nuevas variables: k, $f(k)$

- $k \equiv \frac{K}{AL}$: capital por unidad de trabajo efectivo.
- $f(k) \equiv \frac{F(K,AL)}{AL}$: producción por unidad de trabajo efectivo.

Notar que $f(k) = F(k, 1)$.

Problema 1.B

$$\boxed{\textbf{PDQ: } f(k) = F(k,1)}$$

Por definición:

$$f(k) \equiv \frac{F(K, AL)}{AL}$$

Por retornos constantes a escala:

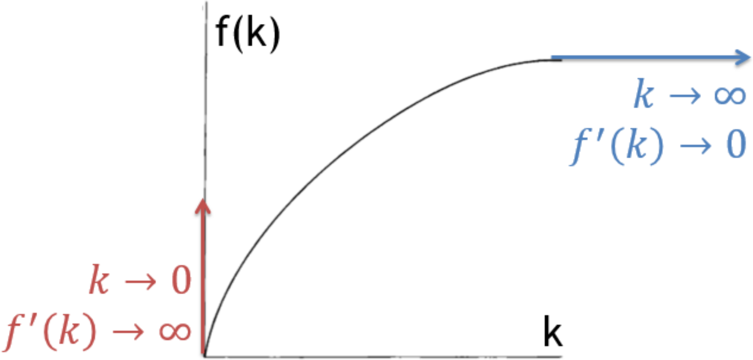
$$= F\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right)$$

$$= F(k,1) \quad \square$$

Supuestos: comportamiento de $f(k)$

- $f(0) = 0$
- $f^{'}(k) > 0$ (creciente)
- $f^{''}(k) < 0$ (cóncava)

Condiciones de Inada



Parámetros δ, g, n y s

Sea t el tiempo. Recordemos una vieja notación: $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$

- δ: desgaste / depreciación del capital.
- g: tasa de crecimiento de la efectividad del trabajo.

$$\dot{A} = gA$$

- n: tasa de crecimiento de la fuerza laboral.

$$\dot{L} = nL$$

- s: tasa de ahorro.

Problema 1.C

La propiedad para $A(t)$ y $L(t)$ es análoga.

Sólo demostraremos el caso de $L(t)$.

$$\boxed{\textbf{PDQ: } \frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t) \Rightarrow L(t) = L(0) \cdot e^{nt}}$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t)$$

$$\Rightarrow \int_{L(0)}^{L(t)} \frac{dL}{L} = n \cdot \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow ln(L(t)) - ln(L(0)) = n \cdot t$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right) = n \cdot t$$

$$\Rightarrow L(t) = L(0) \cdot e^{nt} \quad \square$$

Variación del capital en el tiempo

Apelando a la intuición, podemos entender cómo varía K en el tiempo...

$$\dot{K} = \underbrace{sY}_{\text{Ahorro}} - \underbrace{\delta K}_{\text{Depreciación}}$$

De aquí se obtiene la **ecuación clave** del modelo de Solow:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k$$

Problema 1.D

$$\boxed{\textbf{PDQ: } \dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k}$$

Utilizando la derivada del cuociente y del producto...

$$\dot{k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K}{AL}\right) = \frac{\dot{K}AL - K\frac{\partial}{\partial t}(AL)}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}AL - K\dot{A}L - KA\dot{L}}{(AL)^2}$$

Distribuyendo...

$$\Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}AL}{A^2L^2} - \frac{K\dot{A}L}{A^2L^2} - \frac{KA\dot{L}}{A^2L^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K\dot{A}}{A^2L} - \frac{K\dot{L}}{AL^2}$$

Recordando que $\dot{K} = sY - \delta K$ y agrupando convenientemente...

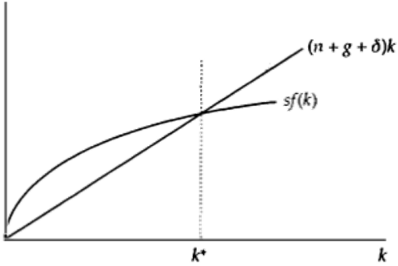
$$\Rightarrow \dot{k} = s\underbrace{\frac{Y}{AL}}_{f(k)} - \delta\underbrace{\frac{K}{AL}}_{k} - \underbrace{\frac{\dot{A}}{A}}_{g}\underbrace{\frac{K}{AL}}_{k} - \underbrace{\frac{\dot{L}}{L}}_{n}\underbrace{\frac{K}{AL}}_{k}$$

$$= sf(k) - \delta k - gk - nk \quad \square$$

Equilibrio del modelo de Solow

Se dice que k^* es un punto de equilibrio si $\dot{k}(k) = 0$.
Equivalentemente:

$$sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$$



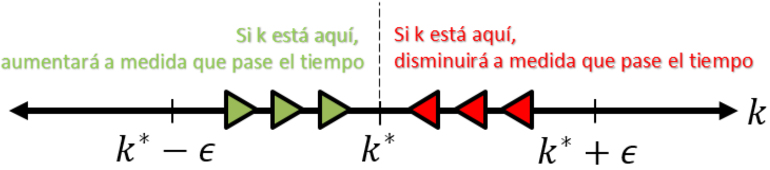
Notemos que en este modelo tradicional las condiciones de Inada y las propiedades de la función $f(k)$ garantizan la existencia de un equilibrio.

Equilibrio estable

Equilibrio estable: equilibrio al cual la variable tiende ante desviaciones suficientemente pequeñas.

Sea k^* un punto de equilibrio y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. k^* será estable si:

- $k \in [k^* - \epsilon, k^*) \Rightarrow \dot{k}(k) > 0$
- $k \in (k^*, k^* + \epsilon] \Rightarrow \dot{k}(k) < 0$



Consumo

"Lo que no ahorro, lo consumo": $C = (1 - s)F(K, AL)$.

Consumo por unidad de trabajo efectivo:

$$c = \frac{C}{AL} = (1 - s)f(k) = f(k) - sf(k)$$

En el equilibrio:

$$c^* = f(k^*) - (n + g + \delta)k^*$$

Una propiedad que demostraremos:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*) - (n + g + \delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Problema 1.E

$$\boxed{\textbf{PDQ: } \frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*) - (n+g+\delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}}$$

$$c^* = f(k^*) - (n+g+\delta) \cdot k^*$$

Usando la regla de la cadena...

$$\Rightarrow \frac{\partial c^*}{\partial s} = f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} - (n+g+\delta) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Factorizando...

$$= [f'(k^*) - (n+g+\delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} \quad \square$$

Regla de oro

La regla de oro para una economía determina el capital por unidad de trabajo efectivo en el estado estacionario (k^*) que maximiza el consumo por unidad de trabajo efectivo c en el mismo.

¡Pero! las personas no eligen k^*, sino la tasa de ahorro s, ¿no?

De hecho, k^* es una consecuencia de s (ver gráfico).

Por lo tanto, el método típico que ocuparemos será:

1. Encontrar s^* con condición de primer orden $\frac{\partial c}{\partial s} = 0$.
2. Reemplazar s^* en la ecuación clave en el equilibrio $sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$
3. Despejar k^*.

Elasticidades

Razón entre la variación relativa de una variable respecto a la variación relativa de otra variable.

$$\epsilon_{y,x} \equiv \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y} \approx \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}$$

Muchas veces depende del punto en el que estamos parados, es decir de las coordenadas actuales (x, y).

Es una medida de sensibilidad adimensional (no depende de las unidades de medida de x e y). Da lo mismo si estamos trabajando con euros, dólares o pesos chilenos.

Se puede trabajar de manera continua o discreta.

Se pueden obtener estadísticamente.

Elasticidades: obtención estadística

Supongamos que tenemos motivos para pensar que la elasticidad entre x e y es relativamente constante.

Si estimamos un modelo log-log de la siguiente forma:

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x) + \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1 \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

¡El coeficiente β_1 a estimar en la regresión lineal no es ni más ni menos que la elasticidad de y en función de x!

Elasticidades relevantes para la trama

- Elasticidad entre $f(k^*)$ y k^*

$$\alpha_k(k^*) \equiv \frac{k^* f^{'}(k^*)}{f(k^*)}$$

- Elasticidad entre $f(k^*)$ y s

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

- Elasticidad entre $f(k^*)$ y n

$$\frac{\partial y^*}{\partial n}\frac{n}{y^*} = \frac{-n}{n+g+\delta}\cdot\frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

Problema 1.F

$$\boxed{\textbf{PDQ: } \frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}}$$

$$\frac{s}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{s}{f(k^*)}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(f(k^*)) = \frac{s}{f(k^*)}\cdot f'(k^*)\cdot\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Obtención de $\frac{\partial k^*}{\partial s}$ en la pizarra [Hint: $s\cdot f(k^*) = (n+g+\delta)\cdot k^*$].

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{-f(k^*)}{s\cdot f'(k^*) - (n+g+\delta)}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{-s\cdot f'(k^*)}{(n+g+\delta) - s\cdot f'(k^*)}$$

Desarrollo algebraico en la pizarra.

$$\Rightarrow \frac{s}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{k^* f'(k^*)/f(k^*)}{1-k^* f'(k^*)/f(k^*)} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

Problema 1.G

$$\boxed{\textbf{PDQ: } \frac{n}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{-n}{n+g+\delta}\cdot\frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}}$$

$$\frac{n}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{n}{y^*}\cdot\frac{\partial}{\partial n}(f(k^*)) = \frac{n}{f(k^*)}\cdot f'(k^*)\cdot\frac{\partial k^*}{\partial n}$$

Obtención de $\frac{\partial k^*}{\partial n}$ en la pizarra [Hint: $s\cdot f(k^*) = (n+g+\delta)\cdot k^*$].

$$\Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial n} = \frac{k^*}{s\cdot f'(k^*) - (n+g+\delta)}$$

Notemos que: $s\cdot f'(k^*) = \frac{(n+g+\delta)\cdot k^*\cdot f'(k^*)}{f(k^*)} = (n+g+\delta)\cdot\alpha_k(k^*)$

Reemplazar este valor en $\frac{\partial k^*}{\partial n}$ y luego reemplazar $\frac{\partial k^*}{\partial n}$ en $\frac{n}{y^*}\cdot\frac{\partial y^*}{\partial n}$. Luego se concluye (pizarra). $\square$

Serie de Taylor

Recordemos que una serie de Taylor de una función $f(x)$ cuando $x \approx x_0$ se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0) \cdot (x - x_0)^i}{i!}$$

Para efectos del curso, nos interesa la aproximación de orden 1.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Problema 1.H

$$\boxed{\textbf{PDQ: } k(t) = e^{-\lambda t}(k(0) - k^*) + k^* \text{ con } \lambda = (n + g + \delta)(1 - \alpha_k(k^*))}$$

Aproximación de Taylor de orden 1 cuando $k \approx k^*$:

$$\dot{k}(k) \approx \underbrace{\dot{k}(k = k^*)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k - k^*)}_{\equiv -\lambda} \Rightarrow \dot{k} = -\lambda \cdot (k - k^*)$$

$$\Rightarrow \int_{k(0)}^{k(t)} \frac{dk}{k - k^*} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow ln(k(t) - k^*) - ln(k(0) - k^*) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow \frac{k(t) - k^*}{k(0) - k^*} = e^{-\lambda t}$$

$$k(t) = [k(0) - k^*] \cdot e^{-\lambda t} + k^*$$

Problema 1.H

$$\boxed{\textbf{PDQ: } k(t) = e^{-\lambda t}(k(0) - k^*) + k^* \text{ con } \lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha_k(k^*))}$$

Hemos asumido: $\lambda = -\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}|_{k=k^*}$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(sf(k) - (n+g+\delta)k) = sf^{'}(k) - (n+g+\delta)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\left(\underbrace{\frac{(n+g+\delta)k^*}{f^{'}(k^*)}}_{s} f^{'}(k^*) - (n+g+\delta)\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha_k(k^*)) \quad \square$$

Un poco de elasticidad (P2)

Considerar que n disminuye de un 2 % a un 1 %.

1. Calcule la elasticidad del producto por unidad de trabajo efectivo en el estado estacionario, y^*, con respecto a la tasa de crecimiento de la población, n, si $\alpha_k(k^*) = \frac{1}{3}$, $g = 2\,\%$ y $\delta = 3\,\%$.
2. ¿Cuánto aumenta y^*?

Desarrollo en la pizarra.

Solow creativo (P3, C2 2016-2)

Considere una versión del modelo de Solow con $y = f(k) = k^{\alpha}$

Recuerde que: $\dot{k} = sf(k) - (n+g)k$.

Las personas sólo ahorran si $k \geq \bar{k}$ donde $\bar{k} > 0$.

1. En un mismo gráfico, dibuje sy y $(n+g)k$ como función de k.
2. ¿Cuántos estados estacionarios tiene este modelo?
3. Encuentre los equilibrios estables e inestables.
4. ¿Cuánto tiempo le toma al capital por unidad de trabajo efectivo quedar a medio camino de su transición desde $\bar{k}$ a su estado estacionario dado por $k^{*} > 0$ si $n = g = 2\,\%$ y $\alpha = \frac{1}{3}$?