Clase Auxiliar 9

Profesor: Elton Dusha
Profesores Auxiliares: Felipe Callpa y Ronald Leblebici

5 de junio de 2017

Problema 1: Demostraciones, modelo de Solow

Demuestre los siguientes enunciados.

A. Una función de producción Cobb-Douglas tiene economías de escala.
Es decir: $F(c \cdot K, c \cdot A \cdot L) = c \cdot F(K, A \cdot L)$, con $F(K, A \cdot L) = K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}$

B. La producción por unidad de trabajo efectivo está dada por $f(k) = F(k, 1)$.

C. Evolución de la fuerza de trabajo (L) en el tiempo: $\frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t) \Rightarrow L(t) = L(0) \cdot e^{nt}$.
La misma propiedad aplica para A(t).

D. Ecuación clave del modelo de Solow: $\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n + g) \cdot k$.

E. $\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*) - (n + g + \delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$.

F. Elasticidad de la producción en el equilibrio respecto al ahorro: $\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$

G. Elasticidad de la producción en el equilibrio respecto al la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo: $\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{-n}{n+g+\delta} \cdot \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$.

H. Rapidez de convergencia: $k(t) = e^{-\lambda t}(k(0) - k^*) + k^*$ con $\lambda = (n + g + \delta)(1 - \alpha_k(k^*))$.

Problema 2 (Romer 1.7): Un poco de elasticidad...

Considerar que n disminuye de un 2 % a un 1 %.

A. Calcule la elasticidad del producto por unidad de trabajo efectivo en el estado estacionario, y^*, con respecto a la tasa de crecimiento de la población, n, si $\alpha_k(k^*) = \frac{1}{3}$, $g = 2\,\%$ y $\delta = 3\,\%$.

B. ¿Cuánto aumenta y^*?

Problema 3: Solow creativo (P3, C2 2016-2)

Considere una versión del modelo de Solow con $y = f(k) = k^{\alpha}$, donde y y k son la producción y el capital por unidad de trabajo efectivo. Recuerde que: $\dot{k} = sf(k) - (n + g)k$.

Suponga que las personas sólo ahorran si $k \geq \bar{k}$ donde $\bar{k} > 0$. Lo anterior significa que $\forall k < \bar{k}, s = 0$ y $\forall k \geq \bar{k}, s > 0$.

A. En un mismo gráfico, dibuje sy y $(n + g)k$ como función de k. [**Hint**: aquí pueden haber diferentes casos.]

B. ¿Cuántos estados estacionarios tiene este modelo?

C. Encuentre los equilibrios estables e inestables.

D. [**5** ¿Cuánto tiempo le toma al capital por unidad de trabajo efectivo quedar a medio camino de su transición desde $\bar{k}$ a su estado estacionario dado por $k^* > 0$ si $n = g = 2\,\%$ y $\alpha = 1/3$?

Hint: Recuerde que $k(t) \approx k^* + e^{-\lambda t}[k(0) - k^*]$ y $\lambda = -\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}|_{k=k^*}$]