Capítulo 14

Ecuaciones de Maxwell

14.1. Corriente de Desplazamiento

Habíamos visto anteriormente que si un conductor con corriente posee cierta simetría favorable, el campo magnético se podía obtener fácilmente mediante la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I_{enc}$$

Esta ecuación indica que la circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada es siempre $\mu_0 I_{enc}$, donde I_{enc} es la corriente que atraviesa una superficie cuyo contorno es la curva de integración.

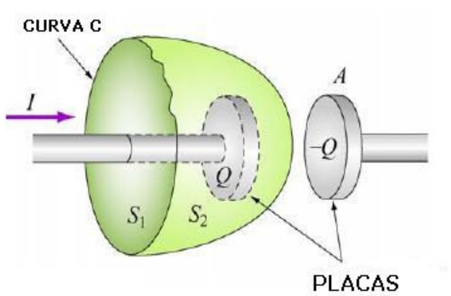
Ahora, en un medio material la ley de Ampère es

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = I$$

Esta ley se puede llevar a su forma diferencial mediante el teorema de Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = J(\vec{x})$$

Sin embargo, esta ley es inconsistente en algunas ocasiones y encontraremos entonces una generalización válida, que fue propuesta por Maxwell. Consideremos el circuito eléctrico de la figura, que consiste de un condensador de placas paralelas, que se está cargando con una corriente de magnitud constante I



Utilizando la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_1

$$\oint_{C} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = I$$

Si, por otra parte, se utiliza la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_2, entonces $J(\vec{x})$ es cero para todo $\vec{x} \in S_2$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Vemos que existe entonces una ambiguedad fundamental en la ley de Ampère al escoger dos superficies de integración distintas. El error es fácil de ver al mirar su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$$

Utilizamos ahora el hecho de que la divergencia de un rotor es nulo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Es inmediato que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ es **inconsistente** con la conservación de la carga en la presente situación, por que de hecho, en el volumen encerrado por ambas superficies, hay un $\partial\rho/\partial t$ distinto de cero (se está acumulando carga en el condensador).
Maxwell corrigió la ley de Ampère al agregar un término tal que de ella se desprenda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t}$$

De la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

y sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}) = 0$$

de manera que la corrección de Maxwell está en agregar el término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a la forma diferencial de la ley de Ampère, y entonces se obtiene la ley de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

es evidente que en el caso de campos que no dependen del tiempo, esta ley es igual a la ley de Ampère. La introducción del segundo término , llamado densidad de *corriente de desplazamiento*, representa una de las más grandes contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética. Veremos que al modificar ésta ley, las ecuaciones de Maxwell predicen la propagación de ondas electromagnéticas.

Por último, la forma integral de la ley de Ampère-Maxwell queda de la forma

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x})$$

En el ejemplo, al integrar en la superficie S_2, el segundo término no es nulo, debido a que hay un flujo del campo $\vec{D}$ a través de S_2 que está variando en el tiempo, de hecho la magnitud del campo crece cuando se acumula carga en el condensador.

14.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell resumen toda la teoría electromagnética. Éstas establecen la relación entre las **fuentes** (densidad de carga $\rho(t,\vec{x})$, y densidad de corriente $\vec{J}(t,\vec{x})$) con los campos $\vec{E}(t,\vec{x}), \vec{B}(t,\vec{x}), \vec{D}(t,\vec{x}), \vec{H}(t,\vec{x})$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial\vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

La primera ecuación $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ es la ley de Gauss, cuya forma integral es

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) = \iiint_{V(S)} d^3x\rho(t,\vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ es la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday, ésta dice que un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico, en su forma integral

$$\oint_\Gamma d\vec{x}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{d}{dt}\oiint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{B}(t,\vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ es la ley de Gauss magnética, y representa el hecho de que los monopolos magnéticos nunca han sido observados. Es decir, las líneas de campo magnético son cerradas, consecuencia de esto es que el flujo magnético sobre una superficie cerrada es siempre cero. En su forma integral

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

Por último, la ecuación $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ es una extensión de la ley de Ampère, mencionada anteriormente. Hay que notar que ésta implica la ecuación de continuidad.

Es claro que las ecuaciones de Maxwell representan expresiones matemáticas de ciertos resultados experimentales. Resulta evidente entonces que no pueden demostrarse, sin embargo, la aplicabilidad para cualquier situación puede verificarse.
Junto con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que actúan electromagnéticamente.

14.2.1. Vector de Poynting- Conservación de la Energía

Las ecuaciones de Maxwell son consistentes con la ley de conservación de la carga eléctrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

o, en su forma integral

$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

intentemos establecer una ley equivalente para la **Conservación de la energía**. Podemos comenzar el análisis definiendo una densidad de energía electromagnética $\epsilon(t, \vec{x})$. Del mismo modo, definimos el **vector de Poynting** $\vec{S}(t, \vec{x})$, donde

$$\vec{S}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{S}(\vec{x})$$

es la energía electromagnética de campo cruzando una superficie $d\vec{S}(\vec{x})$ por unidad de tiempo. Notar que nuestras definiciones de $\epsilon(t, \vec{x})$ y $\vec{S}(t, \vec{x})$ están claramente inspiradas en $\rho(t, \vec{x})$ y $\vec{J}(t, \vec{x})$. Uno podría pensar entonces que la ley de conservación de la energía se escribe en la forma

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x})$$

Sin embargo, esto no está correcto, pues falta incluir un término que involucre el **trabajo** realizado por los campos sobre las cargas presentes en la región V (por unidad de tiempo). La fuerza neta que actúa sobre un elemento de carga por unidad de volumen es (de acuerdo a la fuerza de Lorentz)

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

de forma que el trabajo realizado sobre las cargas por unidad de tiempo es

$$W = \iiint_V d^3x \vec{f} \cdot \vec{v} = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) \left(\vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) \right) = \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Luego, la ley de conservación de la energía debe ser como sigue

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) + \iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

La interpretación es bien clara: la disminución de energía por unidad de tiempo en un volumen V es igual al flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través del contorno de V más el trabajo reaizado sobre las cargas en V por unidad de tiempo. En su forma diferencial

$$\frac{\partial \epsilon(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) = -\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x})$$

Veamos que una expresión de este tipo se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right) + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

Además

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

y

$$\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right) = \vec{B}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)\right) + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\frac{\vec{B}(t,\vec{x})}{\mu_0}\right)$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2(t,\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(t,\vec{x})\right\} + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\frac{\vec{B}(t,\vec{x})}{\mu_0}\right)$$

Comparando con nuestra expresión anterior, obtenemos fórmulas explícitas para ϵ y $\vec{S}$

$$\epsilon(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2(t,\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(t,\vec{x})$$

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})$$

14.3. Ecuaciones de Maxwell en un Medio Lineal, Homogéneo e Isotrópico

Es bien sabido que la relación entre los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en general está dada por

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \left(\epsilon_0 \vec{P} + \right) \vec{E}(t,\vec{x})$$

Sin embargo, en ciertos medios, la polarización depende linealmente del campo eléctrico (medios lineales), de forma que

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(t,\vec{x})$$

donde ϵ es la permitividad del medio, y no depende de $\vec{x}$ para medios homogéneos e isotrópicos.

Del mismo modo, en este tipo de medios simples, el campo $\vec{H}$ está relacionado con $\vec{B}$ mediante

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(t,\vec{x})$$

donde μ es la permeabilidad del medio. De esta forma las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{\rho(t,\vec{x})}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t,\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \mu \vec{J}(t,\vec{x}) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t,\vec{x})$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, donde propiedades del medio se incluyen en ϵ y μ

Capítulo 15

Ondas Planas Monocromáticas

Una de las consecuencias importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz (La luz es, en efecto, una onda electromagnética)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

La razón es que un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético y vice versa. El acoplamiento entre estos dos campos lleva a la generación de ondas electromagnéticas. Esta predicción fue confirmada por Hertz en 1887

Fig. 15.1: Heinrich Hertz

Heinrich Hertz (1857-1894) Físico Alemán. Clarificó y expandió la teoría electromagnética de la luz que fue propuesta por Maxwell. Fue el primero en demostrar de forma satisfactoria la existencia de ondas electromagnéticas al construír un aparato para producir y detectar ondas de radio.

15.1. Ondas electromagnéticas planas en medios no conductores y libres de fuentes

Sabemos que cargas y corrientes son fuentes de campos electromagnéticos. Más adelante veremos exactamente como son creados estos campos a partir de cierta distribución de fuentes. Por el momento, mostraremos algunas soluciones particulares a las ecuaciones de Maxwell, en primer lugar, las ondas planas. Supongamos que se quiere estudiar el comportamiento de los campos en una región del espacio libre de fuentes (Es evidente que para que existan campos, deben existir fuentes en algun lugar del espacio). Lo que quiero decir con esto es que encontraremos un tipo de solución para regiones que están lejos de las fuentes (es decir $\rho(t, \vec{x}) = 0$ en la zona de interés). También asumiremos que el medio en el cual se propagan las ondas no es buen **conductor**, en ese caso tampoco existirá una densidad de corriente $\vec{J}(t,\vec{x})$ en respuesta al campo eléctrico. En este caso las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x})=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x})=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})=\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$$

Utilizaremos ahora la conocida identidad

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{f}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{f}$$

De esta forma

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x})\right)-\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})$$

pero en regiones libre de fuentes

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x})=0$$

como indica la primera ecuación de Maxwell. Así

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=-\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})$$

por otro lado

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})\right)=-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})$$

de forma que

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})-\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})=0}$$

definiendo

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})=0}$$

Esta es la conocida **Ecuación de Onda**. Es decir, hemos llegado a que en un medio libre de cargas y no conductor, el campo eléctrico satisface la ecuación de onda. Las soluciones son ondas que se propagan a velocidad c. Es fácil verificar que el campo magnético satisface **exactamente** la misma ecuación, en efecto

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x})\right)-\vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x})=-\vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x})$$

por otro lado

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})=\vec{\nabla}\times\left(\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})=\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(t,\vec{x})$$

En resumen

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})=0$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(t,\vec{x})=0$$

son las ecuaciones desacopladas para los campos $\vec{E}(t,\vec{x})$ y $\vec{B}(t,\vec{x})$.

Ecuación de Onda en una dimensión

La forma general de la ecuación de onda en una dimensión es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t)=0$$

Resulta inmediato verificar que cualquier función de la forma $\psi(x\pm ct)$ satisface la ecuación de onda en una dimensión. La demostración es la siguiente: Sea $x'=x\pm ct$, con esto $\frac{\partial x'}{\partial x}=1$ y $\frac{\partial x'}{\partial t}=\pm c$. Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial\psi(x')}{\partial x}=\frac{\partial\psi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial\psi(x')}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial^2 x'}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi(x')}{\partial x'}\right)=\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x'^2}\frac{\partial x}{\partial x'}=\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x'^2}$$

Similarmente, las derivadas parciales con respecto a t son

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\pm c\frac{\partial\psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\pm\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)=\pm\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}$$

Luego

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

lo cual muestra que $\psi(x\pm ct)$ es solución de la ecuación de onda en una dimensión. La ecuación de onda es un ecuación diferencial lineal, lo que impica que si $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación de onda, entonces $\psi_1(x,t)\pm\psi_2(x,t)$ también es solución .vLas ondas electromagnéticas obedecen entonces el principio de superposición

Solución a la ecuación de Onda

Para resolver la ecuación de onda que satisfacen los campos electromagnéticos, supondremos que la variación temporal de éstos es de la forma e^{iwt} (es decir, tienen una dependencia oscilatoria en el tiempo a una frecuencia bien determinada, w). A este tipo de ondas las llamaremos **monocromáticas**

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{iwt}$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})e^{iwt}$$

de forma que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = -w^2\vec{E}(\vec{x})$$

Entonces la parte espacial $\vec{E}(\vec{x})$ satisface

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{x}) + \frac{w^2}{c^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

busquemos una solución de la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $\vec{k} =\mid \vec{k} \mid \hat{k}$ y $\vec{E}_0$ es un vector constante

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\vec{E}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $k =\mid \vec{k} \mid$, de forma que

$$-k^2\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{w^2}{c^2}\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

En efecto, es solución si

$$k = \sqrt{\frac{w}{c}}$$

Finalmente, hemos encontrado que una solución de la ecuación de onda en medios no conductores y libres de cargas son campos de la forma

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}$$

con $\mid \vec{k} \mid = \frac{w}{c}$. Sin embargo, los campos deben tener divergencia nula, de forma que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

del mismo modo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$$

Ambos campos deben ser **transversales** (perpendiculares a la dirección de propagación)

Propagación en el eje z

Supongamos ahora que la dirección de propagación de los campos es en la dirección del eje z, es decir

$$\vec{k} = \beta\hat{k} = \frac{w}{c}\hat{k}$$

y

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \beta z$$

entonces

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$
$$\vec{B}(t,z) = \vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

además, ambos campos deben ser perpendiculares al eje z. Por ejemplo, si escogemos

$$\vec{E}(t,z) = E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{i}$$

de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,z) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t,z)$$

se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{j} = -i\beta E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{j} = -iw\vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

entonces

$$i\beta E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{j} = iw\vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

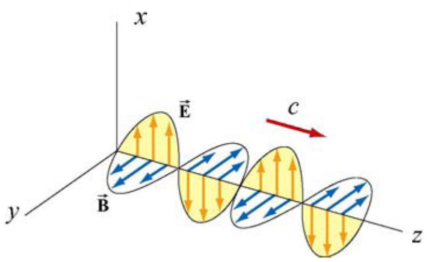
y se desprende que

$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c} \hat{j}$$

Finalmente

$$\vec{E}(t,z) = E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{i}$$
$$\vec{B}(t,z) = B_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{j}$$

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{1}{c}$$
$$\beta = \frac{w}{c}$$



Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están siempre en fase, es decir, alcanzan sus máximos y mínimos al mismo tiempo.
Nota
Por supuesto que los campos físicos se obtienen al tomar la parte real de las soluciones encontradas

$$\vec{E}(t,z) = E_0 \cos(wt - \beta z) \hat{i}$$
$$\vec{B}(t,z) = \frac{E_0}{c} \cos(wt - \beta z) \hat{j}$$

Resumen

1. Las ondas son transversales ya que tanto $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación, que coincide con la dirección del producto $\vec{E} \times \vec{B}$
2. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. Es decir $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
3. La razón entre las magnitudes de los campos es

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{w}{\beta} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

4. La velocidad de propagación es igual a la velocidad de la luz en el medio $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
5. Las ondas electromagnéticas obedecen el principio de superposición

Vector Poynting

En general, el flujo de Energía por unidad de área (y tiempo) está descrito por el vector de Poynting

$$\boxed{\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu}\vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{H}(t,\vec{x})}$$

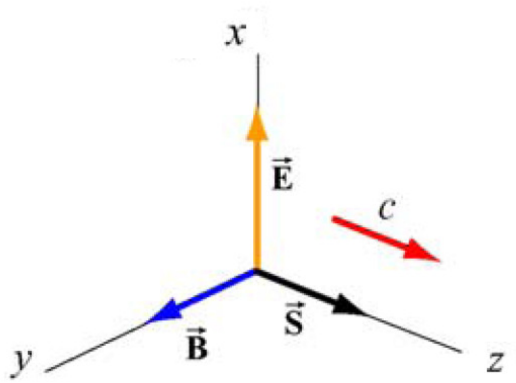
Debido a que los campos son perpendiculares

$$\mid \vec{S}(t,\vec{x}) \mid = \frac{1}{\mu} \mid \vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x}) \mid = \frac{1}{\mu} \mid \vec{E}(t,\vec{x}) \mid\mid \vec{B}(t,\vec{x}) \mid$$

En el caso de las ondas planas monocromáticas recién visto

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu}\frac{E_0 B_0}{c}\cos^2(wt - \beta x)\,\hat{k}$$

Como es de esperar, el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación



La intensidad de la onda I, definida como el promedio temporal de $\mid \vec{S} \mid$ es

$$I = \frac{E_0 B_0}{\mu}\left\langle \cos^2(wt - \beta x)\right\rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu} = \frac{E_0^2}{2c\mu} = \frac{cB_0^2}{2\mu}$$

donde hemos usado

$$\left\langle \cos^2(wt - \beta x)\right\rangle = 1/2$$

Notar que la magnitud de la intensidad es constante. Por supuesto que esto no es muy realista, pues es bien sabido de la vida diaria que la energía de la radiación decae con la distancia. Veremos más adelante que los campos electromagnéticos tienen en general la forma de ondas esféricas, cuya amplitud decae como el inverso de la distancia $1/r$, de forma que la magnitud del vector poynting decae como $1/r^2$. Por supuesto que las ondas planas, si bien son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, constituyen sólo un estudio aproximado de los campos electromagnéticos muy distantes de las fuentes. (Por ejemplo, de la radiación producida por el Sol en la tierra, se puede suponer que la magnitud de los campos es constante). Veremos también que es posible generar ondas planas teóricamente, pero en la práctica no