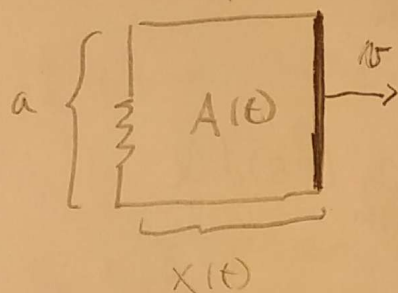


21)

El flujo magnético es proporcional al área del circuito:



$$\Phi = B_0 \cdot A(t)$$

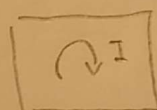
$$= B_0 a x(t)$$

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -B_0 a \dot{x}(t)$$

Usando la ley de Kirchhoff:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow -\frac{B_0 a \dot{x}}{R} = -\frac{B_0 a v}{R}$$

Notemos que la corriente circula en la dirección horario:



Por lo tanto, la corriente "baja", calculamos la fuerza sobre la barra:

$$d\vec{F} = |I(t)| (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$d\vec{\ell} = dX (-\hat{y}) \quad (\text{Porque la corriente baja})$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = -|I(t)| dX B_0 (-\hat{y} \times \hat{z}) = -|I(t)| B_0 dX \hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -|I(t)| B_0 a \hat{x}$$

$$\Rightarrow m \vec{a} = -|I(t)| B_0 a \hat{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -|I(t)| B_0 a$$

$$\Rightarrow m \ddot{v} = -\frac{B_0^2 a^2 v}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{v} = -\frac{B_0^2 a^2 v}{mR}$$

Con v_0 la velocidad inicial

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{B_0^2 a^2 t}{mR}}$$

$$\Rightarrow |I(t)| = \frac{B_0 a v_0 e^{-\frac{B_0^2 a^2 t}{mR}}}{R}$$

$$\Rightarrow P_R = I^2 R = \frac{B_0^2 a^2 v_0^2 e^{-\frac{2B_0^2 a^2 t}{mR}}}{R}$$

Potencia disipada por la resistencia

Calcularemos la energía cinética de la barra:

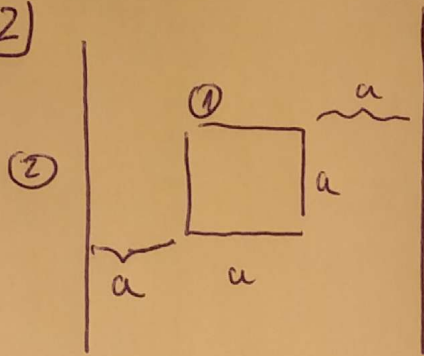
$$K = \frac{mv(t)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} e^{-\frac{2B_0^2 a^2 t}{mR}}$$

Consideremos la potencia de la barra, es decir:

$$P_m = \frac{dK}{dt} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0^2 e^{-\frac{2B_0^2 a^2 t}{mR}}}{R}$$

notemos que: $P_R = -P_m$ Esto significa que la energía cinética que tiene la barra se está transformando en energía eléctrica!

P2)

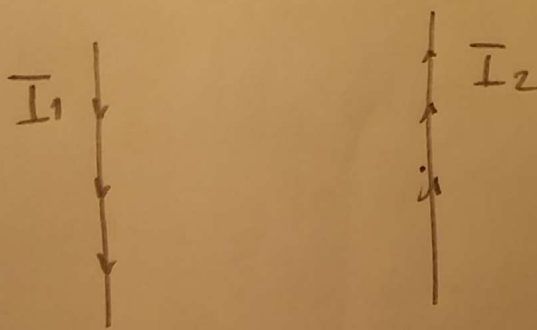


Para este problema, necesitamos calcular el coeficiente de inducción mutua M

Llamaremos ① al circuito cuadrado y ② al circuito grande. Si Φ_{21} es el flujo del circuito ① debido al circuito ②, entonces:

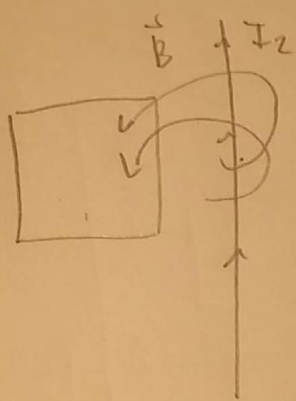
$$M = \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial I_2}$$

Podemos aproximar el circuito ② como 2 alambres infinitos por donde circula una corriente imaginaria I_2 . Por uno de los hilos sube la corriente, y por el otro baja:



El campo que produce un hilo con corriente es conocido?

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \hat{\phi}$$



Calculamos el flujo que produce un hilo:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} dr dz$$

$$= \frac{\mu_0 I_2 a}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_2 a \ln(2)}{2\pi}$$

Por simetría, el flujo que produce el otro hilo en el cuadrado es lo mismo?

$$\Phi_{21} = 2 \cdot \Phi = \frac{\mu_0 I_2 \ln(2) a}{\pi}$$

Calculamos M:

$$M = \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial I_2} = \frac{\mu_0 a \ln(2)}{\pi}$$

Ahora que tenemos M, podemos calcular la f.e.m. inducida en el circuito (2), debido a un cambio en la corriente del circuito (1):

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{\mu_0 a \ln(2)}{\pi} K$$



Primero calculamos el campo magnético en todo el espacio:

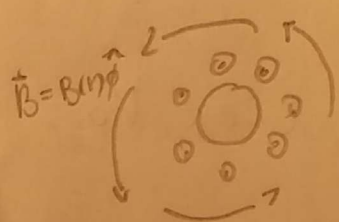
$r < b$ Usando ley de Ampere, hacemos un circuito de radio r . Como este circuito no encierra corriente, el campo adentro es 0.



$$\int \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r) = 0$$

$$\Rightarrow B(r) = 0$$

$b < r < c$ En la sección intermedia, hacemos lo mismo, pero en esta ocasión, el circuito es cruzado con N cables:



$$\int \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r) = \mu_0 N I$$

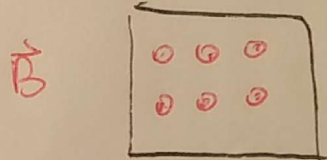
$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Por simetría, el campo tiene que circular

$r > c$ En este caso, si hacemos el circuito de radio r , la corriente total que cruza el área del circuito es 0. Esto debido a que hay N cables por donde "sube" la corriente y otros N por donde "baja": $\vec{B}(r) = 0$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\phi} & b < r < c \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases}$$

Para calcular el coeficiente de autoinducción, necesitamos calcular el autoflujo. Como la bobina tiene N vueltas, basta calcular el flujo sobre una sola y luego multiplicar este flujo por N . Como la bobina tiene sección cuadrada tenemos:

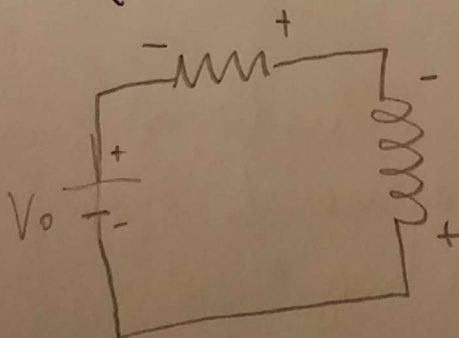


$$\begin{aligned} \Phi_D &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_b^c \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr dz \\ &= \frac{\mu_0 N I a \ln(b/c)}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_{TOT} = N \cdot \Phi_D = \frac{\mu_0 N^2 I a \ln(b/c)}{2\pi}$$

$$L = \frac{d\Phi_{TOT}}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 a \ln(b/c)}{2\pi}$$

b) Al conectar el circuito a una fuente con voltaje V_0 , nos queda un circuito LR:



Usamos la ley de ~~Kirchoff~~ Kirchhoff:

$$V_0 + IR - L\dot{I} = 0$$

↑
Bobinas se oponen al cambio de
la corriente, por eso lleva un signo
menor

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}I - \frac{V_0}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}\left(I - \frac{V_0}{R}\right) = 0$$

$$\text{Sea } z = I - V_0/R ; \dot{z} = \dot{I}$$

$$\Rightarrow \dot{z} + \frac{R}{L}z = 0$$

$$\Rightarrow z = z_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

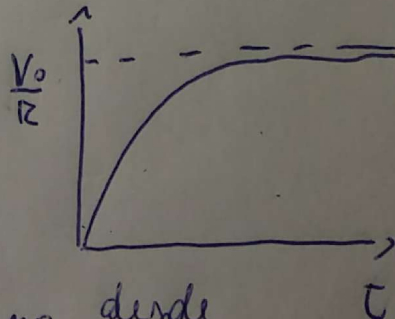
$$\Rightarrow I = z_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}$$

Usamos como condición inicial $I(t=0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = z_0 + \frac{V_0}{R} \Rightarrow z_0 = -\frac{V_0}{R}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\text{Notemos que } \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{V_0}{R}$$



Cuando ha pasado mucho tiempo desde
que se conecta, el efecto de la bobina desaparece.