FI2002-5 Electromagnetismo
Profesor: Matías Montesinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro.

Pauta preguntas 2 y 3, control 2

11 de Mayo de 2017

1 Pregunta 2

1.1 Intensidad, resistencia y potencia [4.0 pts]

Por enunciado tenemos que la densidad de corriente es uniforme, como un extremo del cilindro está V_0 y el otro a está a potencial 0. Supondremos así que la corriente va de una tapa del cilindro a la otra, es decir, $\vec{J} = J\hat{x}$ [**0.5 pts.**]. Por ley de Ohm tenemos que $\vec{E} = \frac{J}{g(x)}\hat{x}$ [**0.5 pts.**]. Sabiendo lo anteior podemos usar la diferencia de potencial para obtener el valor de J:

$$V(0) - V(l) = V_0 = -\int_l^0 \frac{J}{g(x)}\hat{x}\cdot dx\hat{x} = \frac{J}{g_0}\int_0^l e^{-\frac{x}{L}}dx = -\frac{JL}{g_0}(e^{-l/L} - 1) \approx \frac{JL}{g_0} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{g_0 V_0}{L}\hat{x}; \quad \vec{E} = \frac{V_0}{L}e^{-x/L}\hat{x} \quad [\textbf{1.0 pts.}] \tag{2}$$

Donde se usó que $l >> L$. Ahora que tenemos la densidad de corriente, podemos calcular la intensidad de corriente: Como la densidad de corriente apunta en $\hat{x}$ entonces el área que atraviesa esta densidad es simplemente el área de la tapa de cilindro, esto es πa^2. De modo que obtenemos las cantidades pedidas:

$$I = J\pi a^2 = \frac{g_0 V_0}{L}\pi a^2 \quad [\textbf{1.0 pts.}] \tag{3}$$

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{g_0 \pi a^2} \quad [\textbf{0.5 pts.}] \tag{4}$$

$$P = V\cdot I = \frac{g_0 V_0^2}{L}\pi a^2 \quad [\textbf{0.5 pts.}] \tag{5}$$

1.2 Potencial [1.0 pts]

Ya que tenemos el campo eléctrico, es directo obtener el potencial:

$$V(x) = -\int_l^x \frac{V_0}{L}e^{\frac{-x}{L}}dx = V_0(e^{-\frac{x}{L}} - e^{-\frac{l}{L}}) \approx V_0 e^{-\frac{x}{L}} \tag{6}$$

1.3 Densidad de carga [1.0 pts]

De la ley de Gauss tenemos que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{7}$$

De la ley de ohm tenemos que:

$$\vec{J} = g(\vec{r})\vec{E} \tag{8}$$

Juntando ambas ecuaciones:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot (\frac{\vec{J}}{g(\vec{r})}) \tag{9}$$

Sabiendo que el operador $\nabla \cdot$ opera como una derivada común y corriente, tenemos que aplicando la regla del cociente se obtiene el resultado.

$$\nabla \cdot (\frac{\vec{J}}{g(\vec{r})}) = \frac{\nabla \cdot \vec{J} g(\vec{r}) - \vec{J} \cdot \nabla g(\vec{r})}{g^2(\vec{r})} \tag{10}$$

2 Problema 2

2.1 Campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ [3.0 pts.]

Tenemos que **no** hay cargas libres en el interior del dieléctrico, es decir, $\rho_l = 0$, Por simetría, supondremos que = D(z) , tenemos así:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = D\hat{z} \quad \textbf{[1.0 pts.]} \tag{12}$$

De modo podemos obtener una expresión para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{D}{\varepsilon(z)}\hat{z} = \frac{D}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{z}{a}}\hat{z} \quad \textbf{[0.5 pts]} \tag{13}$$

Ahora que tenemos una expresíon para el campo eléctrico, usamos la diferencia de potencial para encontrar D. Teníamos que $V(z = 0) = V_0$ y que $V(z = a) = 0$:

$$V_0 = -\int_a^0 \frac{D}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{z}{a}}\hat{z} \cdot dz\hat{z} = \frac{aD}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{du}{u} = \frac{aD}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}) \tag{14}$$

$$\Rightarrow D = \frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \cdot ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})} \quad \textbf{[1.5 pts.]} \tag{15}$$

Donde hemos usado el cambio de variable $u = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{z}{a}$. Tenemos así las expresiones definitivas para $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

2.2 Polarización [1.0 pts.]

Directo de la definición:

$$\vec{P} = (\varepsilon(z) - \varepsilon_0)\vec{E} = D(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z)})\hat{z} = \frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \cdot ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{z}{a}})\hat{z} \tag{16}$$

2.3 Densidades de carga ligada [2.0 pts]

También directo de las definiciones:

$$\sigma_P(0) = \vec{P}(0) \cdot (-\hat{z}) = -\frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \cdot ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}) \quad \textbf{[0.5 pts]} \tag{17}$$

$$\sigma_P(a) = \vec{P}(a) \cdot (\hat{z}) = \frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \cdot ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}) \quad \textbf{[0.5 pts]} \tag{18}$$

$$\rho_P(z) = -\nabla \cdot \vec{P}(z) = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\frac{D\varepsilon_0 \cdot \varepsilon'(z)}{\varepsilon^2(z)} = -\frac{\varepsilon_0 V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{a^2 \cdot ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})(\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{z}{a})^2} \quad \textbf{[1.0 pts]} \tag{19}$$