

FI2002-5 Electromagnetismo**Profesor:** Matías Montecinos**Auxiliares:** Fabián Álvarez & Diland Castro.

Pauta auxiliar 9

22 de Mayo de 2017

1 Relaciones Útiles

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1) \quad d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (3)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2) \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad (4)$$

2 Soluciones

P1. Sabemos que la fuerza sobre la partícula viene dada por la fuerza de Lorentz. Supondremos que la partícula comienza su movimiento en el plano xy :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5)$$

$$= q((v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \times B \hat{z}) = qB(v_y \hat{x} - v_x \hat{y}) \quad (6)$$

$$\Rightarrow m\dot{\vec{v}} = qB(v_y \hat{x} - v_x \hat{y}) \quad (7)$$

Tenemos así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{v}_x = \frac{qBv_y}{m} \quad (8)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qBv_x}{m} \quad (9)$$

Para desacoplar el sistema, tomaremos la primera ecuación y le sumaremos i veces la segunda ecuación. Para obtener una segunda ecuación tomaremos la primera y le restaremos i veces la segunda:

$$\dot{v}_x + i\dot{v}_y = \frac{qB}{m}(v_y - iv_x) = -\frac{iqB}{m}(v_x + iv_y) \quad (10)$$

$$\dot{v}_x - i\dot{v}_y = \frac{qB}{m}(v_y + iv_x) = \frac{iqB}{m}(v_x - iv_y) \quad (11)$$

Ahora usaremos el siguiente cambio de variables: $z = v_x + iv_y$ $\bar{z} = v_x - iv_y$

$$\dot{z} = -\frac{iqB}{m}z \quad (12)$$

$$\dot{\bar{z}} = \frac{iqB}{m}\bar{z} \quad (13)$$

Las soluciones a estas ecuaciones son:

$$z = Ae^{-\frac{iqB}{m}t} \quad (14)$$

$$\bar{z} = Ae^{\frac{iqB}{m}t} \quad (15)$$

Como una de las variables es la conjugada de la otra y suponiendo que A es un numero real, tenemos que la constante A es la misma para ambas soluciones. Volviendo a las variables originales:

$$v_x = \frac{z + \bar{z}}{2} = B \cdot \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) \quad (16)$$

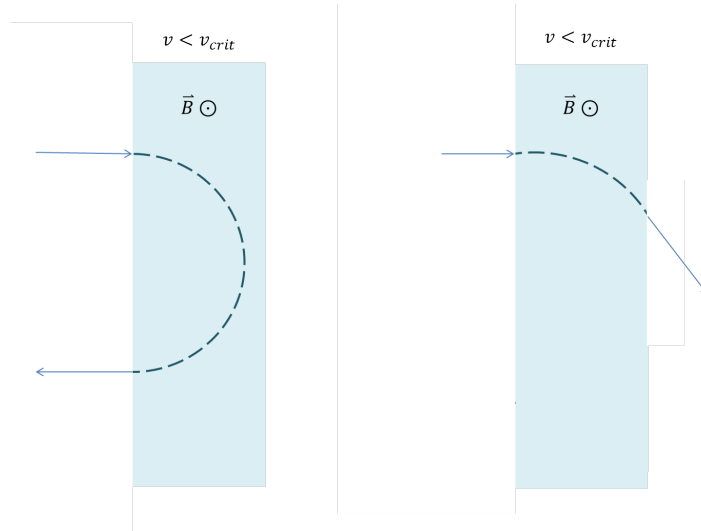
$$v_y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -B \cdot \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \quad (17)$$

Usando como condición inicial que $\vec{v} = v_0\hat{x}$, tenemos que $B = v_0$ de modo que:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) \quad (18)$$

$$v_y = -v_0 \cdot \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \quad (19)$$

Notemos que lo anterior corresponde a un movimiento circular, cuyo centro se encuentra a una distancia R justo bajo el lugar por donde ingresa la partícula a la zona con campo magnético, se puede ver en la figura que la condición para que la partícula logre atravesar el campo es que $R > L$. De las ecuaciones para un movimiento circular uniforme tenemos que:



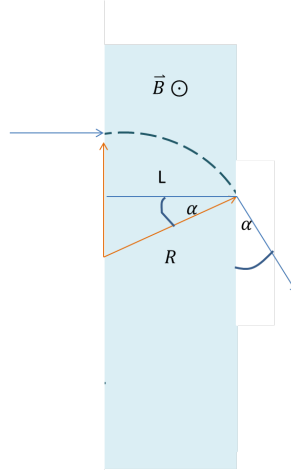
$$\omega R = \frac{qB}{m}R = v_0 \quad (20)$$

$$\Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB} \quad (21)$$

Usando la condición para que la partícula cruce:

$$R > L \Rightarrow v_0 > \frac{qBL}{m} \quad (22)$$

La siguiente figura ilustra como obtener el ángulo de salida con facilidad:

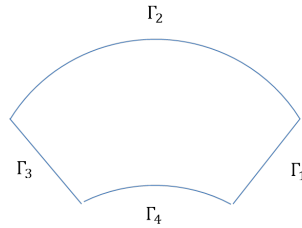


$$\text{sen}(\alpha) = \frac{R}{L} = \frac{mv_0}{qBL} \quad (23)$$

P2. Para esta pregunta, usaremos que el campo que produce un hilo infinito por el que circula una corriente I_1 es de la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (24)$$

Dividiremos el circuito al que le queremos calcular la fuerza en 4 segmentos distintos como se muestra en la figura:



- Γ_1 : Usamos la ecuación 3 para determinar cuanto vale el diferencial de fuerza, notemos que el $d\vec{l}$ se escoge de modo que vaya paralela a la corriente del circuito, de esta forma $d\vec{l} = dr\hat{r}$, tenemos así que:

$$d\vec{F} = I_2(d\vec{l} \times \vec{B}) = I_2 B(r) dr(\hat{r} \times \hat{\phi}) = \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r} \hat{z} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\Gamma_1} = \int_a^b \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r} \hat{z} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z} \quad (26)$$

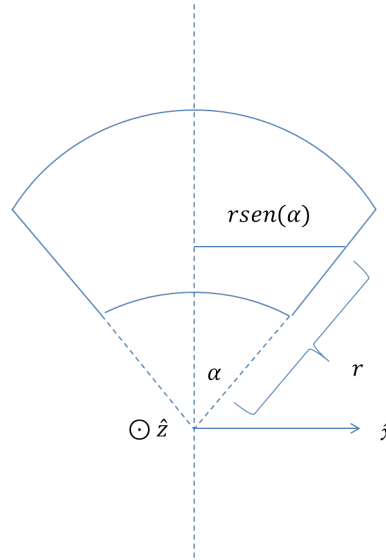
- Γ_2 : En este caso tenemos que $\vec{dl} = r d\phi \hat{\phi}$, notemos que en este caso el campo magnético es paralelo al diferencial de línea, por lo tanto $\vec{dl} \times \vec{B} = 0$, de modo que la fuerza sobre este segmento es 0
- Γ_3 : Hacemos lo mismo para el caso de Γ_1 , solo que esta vez escogemos $\vec{dl} = -dr \hat{r}$. Hacemos esta elección porque la fórmula exige que el diferencial de línea vaya en la misma dirección en que circula la corriente. Haciendo un desarrollo análogo tenemos que:

$$d\vec{F} = I_2(\vec{dl} \times \vec{B}) = -I_2 B(r) dr (\hat{r} \times \hat{\phi}) = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r} \hat{z} \quad (27)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\Gamma_3} = - \int_a^b \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r} \hat{z} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z} \quad (28)$$

- Γ_4 : Vale 0 debido al mismo argumento que se usó para la fuerza en Γ_2

Sumando todas las fuerzas obtenemos que la fuerza total sobre el circuito es 0!. Ahora bien, el torque total también será 0? La respuesta es no, dado que las fuerzas apuntan en sentidos contrarios, tendremos un torque respecto al eje de simetría del circuito. En la auxiliar calculamos el torque respecto al centro común de los arcos de circunferencia, ahora bien, este punto pertenece al eje de simetría del circuito así que el resultado es el mismo si es que calculamos el torque directamente respecto a este eje. Como solo tenemos fuerza en las secciones radiales del circuito, el torque solo se ejerce en estas zonas, de modo que necesitamos calcular la distancia entre cada elemento infinitesimal de estos segmentos y el eje de rotación. Notemos en la figura que esta distancia corresponde a $r \cdot \sin(\alpha)$.



- Γ_1 : El torque respecto al eje queda:

$$d\tau = r \sin(\alpha) \hat{x} \times (dF_1 \hat{z}) = -r \sin(\alpha) dF_1 \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) dr}{2\pi} \hat{y} \quad (29)$$

$$\tau_{\Gamma_1} = - \int_a^b \frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) dr}{2\pi} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) (b-a)}{2\pi} \hat{y} \quad (30)$$

- Γ_3 Para este segmento tenemos que:

$$d\tau = r \sin(\alpha) (-\hat{x}) \times (dF_3 (-\hat{z})) = -r \sin(\alpha) dF_3 \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) dr}{2\pi} \hat{y} \quad (31)$$

$$\tau_{\Gamma_3} = - \int_a^b \frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) dr}{2\pi} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) (b-a)}{2\pi} \hat{y} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_1 + \tau_3 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin(\alpha) (b-a)}{\pi} \hat{y} \quad (33)$$

Notemos que este torque trata de orientar el circuito en la misma dirección que el campo magnético.

P3. En este problema usaremos la ecuación 4, primero notar que el vector $\vec{r}$ que sale en la formula es el vector que va desde un elemento diferencial del circuito al punto donde queremos calcular el campo magnético, por otro lado, al igual que en el problema anterior tenemos que elegir de modo que vaya en la misma dirección que la corriente. Dividiremos el circuito en 2 partes: Sea Γ_1 la parte espiral del circuito y Γ_2 la parte recta:

- Γ_1 : Lo primero que hacemos es calcular cuanto vale un diferencial de línea para esta curva, como tenemos que θ parametriza esta curva:

$$\vec{r}(\theta) = r(\theta) \hat{r} \quad (34)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \left(\frac{dr}{d\theta}(\theta) \hat{r} + r(\theta) \frac{d\hat{r}}{d\theta} \right) = \left(\frac{dr}{d\theta}(\theta) \hat{r} + r(\theta) \hat{\theta} \right) \quad (35)$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \left(\frac{dr}{d\theta}(\theta) \hat{r} + r(\theta) \hat{\theta} \right) d\theta \quad (36)$$

El otro vector que necesitamos es aquel que va desde algún punto de la curva la origen del sistema de coordenadas, naturalmente este vector corresponde al vector $\vec{r}' = r(\theta)(-\hat{r})$.

Ahora que tenemos los 2 vectores que necesitamos, podemos calcular el campo magnético, para ello primero necesitamos calcular lo siguiente:

$$d\vec{r} \times \vec{r}' = r^2(\theta) d\theta \hat{z} = \quad (37)$$

Con lo que podemos finalmente calcular el campo magnético:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3(\theta)} (d\vec{r} \times \vec{r}') = \frac{\mu_0 I}{4\pi r(\theta)} d\theta \hat{z} \quad (38)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r(\theta)} d\theta \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_0^{2\pi} e^{\frac{-\theta \ln(2)}{2\pi}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2 \ln(2)} \hat{z} \quad (39)$$

- Γ_2 En este caso tenemos que $\vec{dr} = dx\hat{x}$ y que $\vec{r} = -r\hat{x}$. Dado lo anterior tenemos que $\vec{dr} \times \vec{r} = 0$ y por lo tanto $d\vec{B} = 0$.

Por lo tanto la única contribución al campo magnético es la que produce la parte espiral del circuito

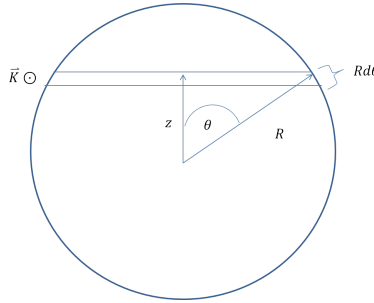
P4. En este problema usaremos que el campo que produce una espira circular de radio R a una altura z sobre su eje es:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I \cdot r^2}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (40)$$

Se puede obtener fácilmente este campo usando la ecuación (4) con $\vec{dr} = R d\phi \hat{\phi}$ y $\vec{r} = -R\hat{\rho} + z\hat{z}$ lo cual queda propuesto como ejercicio. Ahora volviendo al problema original, queremos calcular el campo que produce la esfera rotando justo en el centro de esta. Como tenemos carga superficial rotando podemos definir una densidad de corriente superficial de la siguiente forma:

$$\vec{K}(\theta) = \sigma \cdot \vec{v} = \sigma \omega R \text{sen}(\theta) \hat{\phi} \quad (41)$$

Donde se ha usado que la velocidad tangencial en un punto de la esfera es su velocidad angular multiplicada por la distancia del punto al eje de rotación, esta ultima distancia corresponde a $R \text{sen}(\theta)$ donde R es el radio de la esfera. Ahora que tenemos la densidad de corriente, lo que vamos a hacer es dividir la esfera en muchas espiras circulares de radio $R \text{sen}(\theta)$ por donde circula una corriente $dI = K R d\theta$, donde K es el modulo de la densidad de corriente, y es $R d\theta$ es el ancho infinitesimal de cada una de estas espiras. Ahora que conocemos el campo que produce cada una de estas espiras a una altura z de su centro, podemos integrar el campo que producen todas estas espiras en el centro de la esfera: La distancia desde el centro de estas espiras hasta el centro de la esfera viene dada por $z = R \cos(\theta)$ (ver figura). Así tenemos que cada espira contribuye en un $d\vec{B}$ al campo total de la forma:



$$r = R \text{sen}(\theta) \quad (42)$$

$$z = R \cos(\theta) \quad (43)$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{\mu_0 dI R^2 \text{sen}^2(\theta)}{R^3} \hat{z} = \mu_0 \omega \sigma R \text{sen}^3(\theta) d\theta \hat{z} \quad (44)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \omega \sigma R \hat{z} \int_0^\pi \text{sen}^3(\theta) d\theta = \frac{4\mu_0 \omega \sigma R}{3} \hat{z} \quad (45)$$

La integral anterior se calcula usando que $\text{sen}^3(\theta) = \text{sen}(\theta)(1 - \cos^2(\theta))$.