FI2002-5 Electromagnetismo
Profesor: Matías Montecinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro.

Pauta auxiliar 7

06 de Mayo de 2017

1 Relaciones Útiles

$$\vec{J} = g\vec{E} \quad (1)$$

$$R = \frac{l}{gA} \quad (2)$$

$$I = \frac{V}{R} \quad (3)$$

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad (4)$$

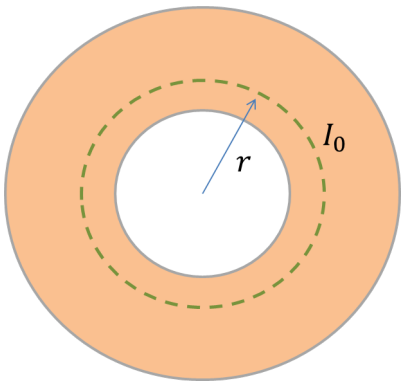
2 Soluciones

P1. Sabemos que sobre una superficie imaginaria de radio r, como se muestra en la figura, atraviesa una corriente I_0, supondremos que $\vec{J} = J(r)\hat{r}$:

$$I_0 = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 J(r) \quad (5)$$

$$\Rightarrow J(\vec{r}) = \frac{I_0}{4\pi r^2}\hat{r} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{g(r)} = \frac{I_0 R_2}{4\pi r^3 g_0}\hat{r} \quad (7)$$



Definiremos $V(r = R_2) = 0$, de modo que:

$$V(R_1) = -\int_{R_2}^{R_2} E(r)dr = \frac{I_0 R_2}{4\pi g_0}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) \tag{8}$$

Tenemos así la diferencia de potencial, si usamos la ley de Ohm (eq (3)) obtenemos la resistencia:

$$R = \frac{\Delta V}{I_0} = \frac{R_2}{4\pi g_0}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) \tag{9}$$

Notemos que la resistencia solo depende de la geometría y de g_0

P2. El vector $\vec{J}$ satisface una ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Si el sistema lleva mucho tiempo conectado, entonces se dice que se ha alcanzado el estado **estacionario**, eso quiere decir que las variables del problema **no** dependen del tiempo, por lo tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (rJ(r))}{\partial r} = 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow J(\vec{r}) = \frac{C}{r}\hat{r} \tag{14}$$

$$\Rightarrow E(\vec{r})\frac{C}{gr}\hat{r} \tag{15}$$

Sabemos que la diferencia de potencial es V_0, digamos que $V(b) = 0$ y que $V(a) = V_0$:

$$V_0 = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_a^b \frac{C dr}{gr} = \frac{C}{g} ln(\frac{b}{a}) \tag{16}$$

$$\Rightarrow C = \frac{gV_0}{ln(\frac{b}{a})} \tag{17}$$

$$\vec{E} = \frac{V_0}{ln(\frac{b}{a})r}\hat{r} \quad \vec{J} = \frac{gV_0}{ln(\frac{b}{a})r}\hat{r} \tag{18}$$

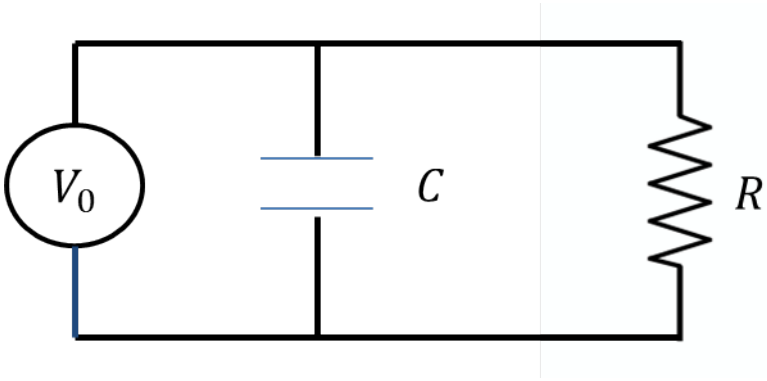
Ahora que tenemos la densidad de corriente, podemos calcular la intensidad que circula por el material:

$$I = \int_S \vec{J}d\vec{S} = 2\pi r L J(r) = \frac{2\pi L g V_0}{ln(\frac{b}{a})} \tag{19}$$

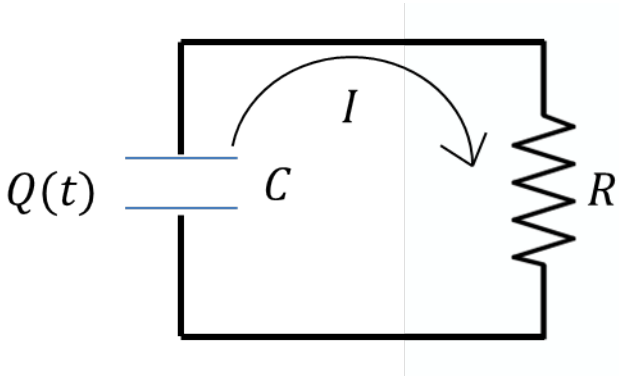
$$\Rightarrow R = \frac{V_0}{I} = \frac{ln(\frac{b}{a})}{2\pi L g} \tag{20}$$

$$P = IV = \frac{2\pi L g V_0^2}{ln(\frac{b}{a})} \tag{21}$$

La capacitancia de un condensador cilíndrico es conocida: $C = \frac{2\pi L \epsilon}{ln(\frac{b}{a})}$. Ahora que tenemos R y C, podemos dibujar esquemáticamente el circuito:



Notemos que corresponde a un circuito RC, si desconectamos la batería, el circuito pasa a ser:



Inmediatamente después de desconectar la batería, la carga que estaba almacenada en la placa positiva del condensador comenzará a fluir hacia su cara negativa. Lo que queremos es obtener la carga $Q(t)$ que va quedando en la cara positiva del condensador. Para determinar esta función, usaremos la ley de voltajes de Kirkchoff, sumamos las caídas de potencial en el condensador y en la resistencia:

$$V_{condensador} = \frac{Q(t)}{C} \quad V_R = -IR \tag{22}$$

$$V_{condensador} + V_R = \frac{Q(t)}{C} - IR = 0 \tag{23}$$

La intensidad de corriente se define como **carga por unidad de tiempo**, por lo tanto la intensidad de corriente que circula en el circuito corresponde a la variación de carga en la placas positiva del condensador, es decir, $I = -\frac{dQ}{dt}$. El signo menos se antepone a la derivada ya que como la carga en el condensador va decayendo, entonces $\frac{dQ}{dt} < 0$, pero necesitamos que I sea una cantidad positiva, de modo que:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 \tag{24}$$

La solución a esa EDO es: $Q(t) = Q_0 e^{\frac{-t}{RC}}$ donde Q_0 es la carga que hay en el condensador en el instante $t = 0$, el voltaje en el condensador en el tiempo $t = 0$ es V_0, por lo que $Q_0 = CV_0$, concluimos que:

$$Q(t) = CV_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \tau = RC \tag{25}$$

Cuando $t = 5\tau$, se puede decir que el condensador está prácticamente descargado. ’

P3. Sabemos que la resistencia de un filamento es $R = \frac{l}{gA}$ (eq (2)). Tenemos que hay 5 de estos filamentos en **paralelo**, por lo que la resistencia equivalente satisface:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{5}{R_{filamento}} = \frac{5gA}{l} \tag{26}$$

$$R_{eq} = \frac{l}{5gA} \tag{27}$$

Queremos minimizar el tiempo que pasa el pan en el tostador, esto es equivalente a maximizar la potencia que se disipa en R_{eq}. Esta potencia viene dada por:

$$P = I^2 R_{eq} \quad I = \frac{V_0}{R_{tot}} = \frac{V_0}{R + R_{eq}} \tag{28}$$

$$P = \frac{V_0^2 R_{eq}}{(R + R_{eq})^2} \tag{29}$$

Para maximizar, debemos derivar e igualar a 0:

$$\frac{\partial P}{\partial R_{eq}} = V_0^2 \big(\frac{1}{(R + R_{eq})^2} - \frac{2R_{eq}}{(R + R_{eq})^3} \big) = 0 \tag{30}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = R \tag{31}$$

Ahora que tenemos la resistencia que maximiza la potencia entregada, solo basta despejar l:

$$R_{eq} = \frac{l}{5gA} = R \tag{32}$$

$$l = 5gAR \tag{33}$$

P4. Como las esferas están muy alejadas entre si, supondremos que el campo que producen es el campo que producen 2 esferas con carga distribuida de manera uniforme, es decir:

$$E\vec{(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\hat{r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\hat{r_2} \tag{34}$$

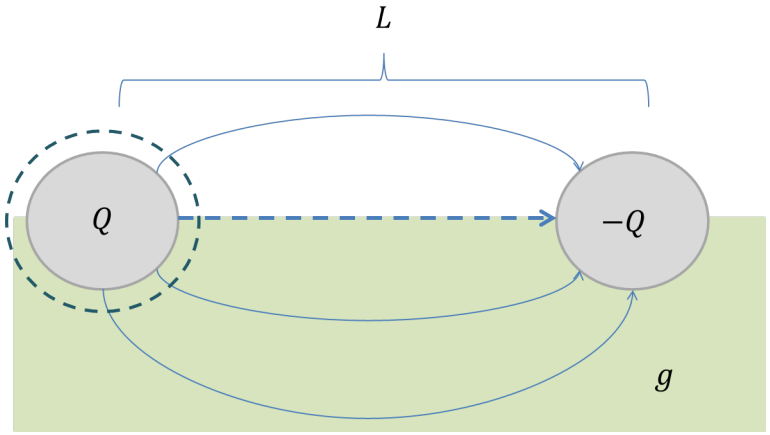
Necesitamos calcular la intensidad de corriente que circula por la tierra, para calcularla, lo que vamos a hacer es calcular el flujo de campo eléctrico a través de una esfera ligeramente más grande que la esfera con carga positiva:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{35}$$

Ahora bien, sabemos que solo la tierra presenta conductividad, por lo que solo nos interesa el flujo sobre el hemisferio inferior de la esfera sobre la cual estamos integrando. Por simetría, el flujo que pasa por el hemisferio superior es igual al flujo sobre el hemisferio inferior:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{36}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} g\vec{E}\cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{J}\cdot r^2 sen(\theta) d\phi d\theta \hat{r} = I = \frac{gQ}{2\epsilon_0} \tag{37}$$



Nos falta calcular la diferencia de potencial entre las esferas, para hacer esto, debemos integrar el campo eléctrico sobre un camino que vaya desde la superficie de la esfera con carga positiva hasta la superficie de la esfera con carga negativa. Elegimos el camino más sencillo, el cual el que va justo sobre la superficie de la tierra. Por principio de superposición, calculamos la diferencia de potencial que produce cada esfera por separado, y luego las sumaremos:

$$\Delta V_1 = \int_a^{L-a} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}\right) \tag{38}$$

$$\Delta V_2 = \int_{l-a}^{a} -\frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}\right) \tag{39}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}\right) \tag{40}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{g\pi}\left(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}\right) \tag{41}$$