FI2002-5 Electromagnetismo
Profesor: Matías Montecinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro.

Pauta auxiliar 3

03 de Abril de 2017

1 Relaciones Útiles

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1) \qquad V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad (2) \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{||\vec{r}-\vec{r}'||} \quad (3)$$

Nota: El $\vec{r}_0$ de la ecuación (2) es algún punto que se escoge de tal forma que $V(\vec{r}_0) = 0$. Si esto no fuera así, habría que sumar el valor de $V(\vec{r}_0)$ al lado derecho. El punto $\vec{r}_0$ puede considerarse en infinito si es que esto resulta conveniente.

2 Soluciones

P1. Tenemos que la densidad volumétrica de carga es $\rho = 0$ en todo el espacio salvo en las superficies conductoras. Por lo que $\nabla^2 V = 0$ en todas partes salvo en las superficies, supondremos por simetría que $V = V(r)$. De ahí concluimos que:

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) & \text{r} \le a \\ V_2(r) & \text{a} < \text{r} \le b \\ V_3(r) & \text{b} < \text{r} \le c \\ V_4(r) & \text{c} < r \end{cases}$$

$$\nabla^2 V_i = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow V_i = -\frac{A_i}{r} + B_i \quad (6)$$

Ahora usamos el valor del potencial sobre las superficies para determinar las constantes A_i y B_i:

1) Tenemos que para $r \le a$, no hay carga, esto implica que el potencial **no** puede diverger, por lo tanto la constante A_1 tiene que ser 0. Como también se debe cumplir que $V_1(a) = 0$, concluimos que $B_1 = 0$, por lo tanto $V_1(r) = 0$

2) Tenemos que:

$$V_2(a) = 0 \ ; \ V_2(b) = V_0$$
$$\Rightarrow -\frac{A_2}{a} + B_2 = 0 \ ; \ -\frac{A_2}{b} + B_2 = V_0$$
$$\Rightarrow A_2 = V_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} \ ; \ B_2 = \frac{V_0}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

3) Análogo al caso i = 2:

$$A_3 = V_0\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)^{-1} \ ; \ B_3 = \frac{V_0}{c}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

4) Como tenemos una cantidad finita de carga en el espacio (en las superficies), tenemos que el potencial debe converger a 0 cuando r se hace infinito, usando esto, y considerando que $V_4(c) = 0$, concluimos que $A_4 = B_4 = 0$, por lo tanto $V_4 = 0$.

P2. Primero calculamos el campo eléctrico en el interior del cilindro. Como la densidad de carga solo depende del radio, y además por simetría, tenemos que $\vec{E_{int}} = E_{int}(r)\hat{r}$. Calculamos el flujo de campo eléctrico a través de un manto cilíndrico de radio $r < R$ y altura h arbitraria y aplicamos la lay de Gauss:

$$\Phi = \int_{manto} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_0^h \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot r d\phi dz \hat{r} = 2\pi h r E(r) \tag{7}$$

$$Q_{encerrada} = \int_{cilindro} \rho dV = \int_0^r \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho_0\left(\frac{r}{R}\right) r d\phi dz dr = \frac{2\pi h \rho_0 r^3}{3R} \tag{8}$$

$$\Rightarrow 2\pi h r E(r) = \frac{2\pi h \rho_0 r^3}{3R\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E_{int}} = \frac{\rho_0 r^2}{3R\epsilon_0}\hat{r} \tag{9}$$

Para el campo en $R < r$, los cálculos son los mismos que para el caso anterior, con la diferencia que la integral de volumen de la densidad de carga se realiza entre 0 y R, y **no** entre 0 y r, con esto nos queda:

$$\vec{E_{ext}} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0 r}\hat{r} \tag{10}$$

Ahora calcularemos el potencial eléctrico usando la integral de linea del campo eléctrico, por conveniencia, imponemos que V(R) = 0 (**Nota:** Recordando que $\vec{E} = -\nabla V$, se cumple también que $\vec{E} = -\nabla(V + k)$ con k alguna constante arbitraria, lo anterior nos permite fijar el "cero" del potencial en cualquier punto del espacio), para $R < r$ tenemos que:

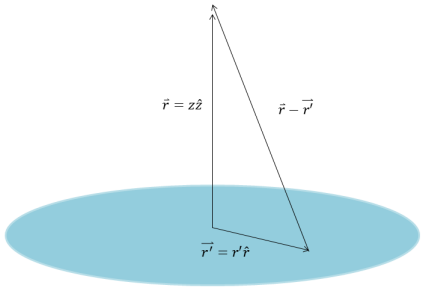
$$V(r) = -\int_R^r \vec{E_{ext}} \cdot \vec{dr} = -\int_R^r \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0 r}\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} ln(\frac{R}{r}) \tag{11}$$

Mientras que para $r < R$:

$$V(r) = -\int_R^r \vec{E_{int}} \cdot \vec{dr} = -\int_R^r \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 R}\hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\rho_0}{9\epsilon_0 R}(R^3 - r^3) \tag{12}$$

P3. En este problema, calcularemos el potencial por definición:

$$V_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\|\vec{r}-\vec{r'}\|} \rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|} \tag{13}$$



En el caso de este disco, $dq = \sigma \cdot dS$. Nos piden calcular el potencial sobre el eje del disco, con lo que $\vec{r} = z\hat{z}$. Por otro lado, como se trata de un disco $\vec{r'} = r'\hat{r}$ y $dS = r'd\phi dr$, de modo que $\|\vec{r}-\vec{r'}\| = \|z\hat{z} - r'\hat{r}\| = \sqrt{z^2 + r'^2}$. Con lo que tenemos:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \cdot r' d\phi dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{r'^2 + z^2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} - z) \tag{14}$$

Para la parte b), suponemos que tenemos 2 discos, uno de radio $R_1 = R + \frac{b}{2}$ y densidad de carga σ, y otro de radio $R_2 = R - \frac{b}{2}$ y densidad $-\sigma$, si superponemos ambos discos, obtenemos el anillo al cual queremos calcularle el potencial. De la parte anterior:

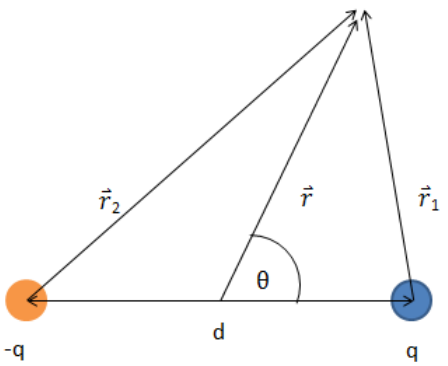
$$V_1(z) = \tfrac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R_1^2 + z^2} - z)$$

$$V_2(z) = -\tfrac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R_2^2 + z^2} - z)$$

$$V_{tot}(z) = V_1(z) + V_2(z) = \tfrac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R_1^2 + z^2} - \sqrt{R_2^2 + z^2})$$

Propuesto: Considere la expansión en Taylor de la raíz: $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$. Interprete los resultados anteriores cuando $R, R_1, R_2 << z$.

P4. Sabemos que el potencial total será la suma de los potenciales de cada carga:



$$V(\vec{r}) = V_q(\vec{r_1}) + V_{-q}(\vec{r_2}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \tag{15}$$

Pero nos interesa dejar el potencial en función de r y θ, para eso, hacemos uso del teorema del coseno:

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos(\theta) \tag{16}$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos(\theta) \tag{17}$$

Usamos el echo de que $d << r$, con lo que $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx 0$, manipulando algebraicamente las ecuaciones, y considerando la expansión en Taylor $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$, obtenemos:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - rd\cos(\theta)}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos(\theta)}} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{d}{2r}\cos(\theta)) \tag{18}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + rd\cos(\theta)}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos(\theta)}} \approx \frac{1}{r}(1 - \frac{d}{2r}\cos(\theta)) \tag{19}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{d\cos(\theta)}{r^2} \tag{20}$$

Reemplazando en la ecuación 15:

$$V(r,\theta) = \frac{q \cdot d\cos(\theta)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \tag{21}$$