P3 - Control 2 | No es la Pauta

$\alpha = \alpha_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

a) Encontrar el momentum angular c/r a O de la masa de más abajo

→ Si llamamos $\vec{r}_1$ posición de la masa 1
$\vec{r}_2$ " " " " 2

$\vec{l}_2 = m\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$ ; con $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$

Escribimos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en cartesianos.

→ $\vec{r}_1 = d(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$ , $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + d(\operatorname{sen}\alpha\,\hat{i} - \cos\alpha\,\hat{j})$

⇒ $\vec{r}_2 = d(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha)\hat{i} - d(\cos\theta + \cos\alpha)\hat{j}$

Derivamos.

$$\dot{\vec{r}}_2 = d(\cos\theta\,\dot{\theta} + \cos\alpha\,\dot{\alpha})\hat{i} + d(\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} + \operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha})\hat{j}$$

Luego $\vec{l}_2 = m\,\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$ ; Los productos cruces $\hat{i}\times\hat{i}$ y $\hat{j}\times\hat{j}$ son cero.

$$= m d^2 (\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} + \operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha})\underbrace{\hat{i}\times\hat{j}}_{\hat{k}}$$

$$- m d^2 (\cos\theta + \cos\alpha)(\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} + \operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha})\underbrace{\hat{j}\times\hat{i}}_{-\hat{k}}$$

$$= m d^2 \Big[\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\theta} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha(\dot{\theta}+\dot{\alpha}) + \operatorname{sen}^2\alpha\,\dot{\alpha}$$
$$+ \cos^2\theta\,\dot{\theta} + \cos\theta\cos\alpha(\dot{\theta}+\dot{\alpha}) + \cos^2\alpha\,\dot{\alpha}\Big]\hat{k}$$

$$= m d^2 \Big[\dot{\theta}(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \dot{\alpha}(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + \cos(\theta-\alpha)(\dot{\theta}+\dot{\alpha})\Big]\hat{k}$$

→ Usamos - $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta \approx 1$

- Si $\theta \ll 1$ y $\alpha \ll 1$

$\Rightarrow \cos(\theta - \alpha) \approx 1$

$\Rightarrow \vec{l}_2 = md^2\left[\dot\theta + \dot\alpha + (\dot\theta + \dot\alpha)\right]\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{l}_2 = 2md^2(\dot\theta + \dot\alpha)$

→ Para calcular $\vec{l}_{tot} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$

Donde $\vec{l}_1 = md^2\dot\theta$

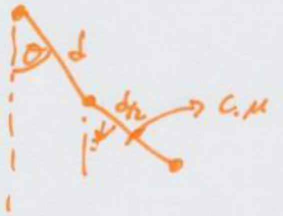
$\Rightarrow \boxed{\vec{l}_{tot} = md^2(3\dot\theta + 2\dot\alpha)}$

b) Encontrar la ec de mov para $\theta$.

→ La ec de movimiento para este caso sería

$\dot{\vec{l}}_{tot} = \vec{\tau}$ → Torque total = Torque del peso del sistema sobre su centro de masas

→ Como las masas son iguales, su centro de masas está al medio de la segunda barra




$\vec{r}_{cm} = (d\,\text{sen}\theta + \frac{d}{2}\,\text{sen}\alpha)\hat{\imath} - (d\cos\theta + \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{\jmath}$

$\Sigma F = -2mg\,\hat{\jmath}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times F = \left[(d\,\text{sen}\theta + \frac{d}{2}\text{sen}\alpha)\hat{\imath} - (d\cos\theta + \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{\jmath}\right] \times (-2mg)\hat{\jmath}$

$= -2mg(d\,\text{sen}\theta + \frac{d}{2}\,\text{sen}\alpha)\hat{k}$

luego hacemos $\dot{\vec{l}} = \vec{\tau}$ con $\dot{\vec{l}} = md^2(3\ddot{\theta} + 2\ddot{\alpha})$

$$\Rightarrow md^2(3\ddot{\theta} + 2\ddot{\alpha}) = -2mg\left(d\,\text{sen}\,\theta + \frac{d}{2}\,\text{sen}\,\alpha\right)$$

Hacemos los reemplazos: $\alpha = \alpha_0\,\text{sen}\,\omega t$

$\ddot{\alpha} = -\alpha_0 \omega^2\,\text{sen}\,\omega t$

y las aproximaciones: $\text{sen}\,\theta \approx \theta$

$\text{sen}\,\alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow 3md^2\ddot{\theta} + 2md^2\ddot{\alpha} = -2mgd\theta - mgd\alpha$$

$$3md^2\ddot{\theta} + 2mgd\theta = -2md^2\ddot{\alpha} - mgd\alpha \quad \Big/ \frac{1}{3md^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{d}\theta = -\frac{2}{3}\ddot{\alpha} - \frac{g}{3d}\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{d}\theta = \frac{2}{3}\alpha_0\omega^2\,\text{sen}\,\omega t - \frac{g}{3d}\alpha_0\,\text{sen}\,\omega t \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{d}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \underbrace{\frac{2}{3}\alpha_0\,\text{sen}\,\omega t\left(\omega^2 - \frac{g}{2d}\right)}_{f(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = f(t)}$$ Ec de un oscilador amortiguado

c) Calcular $\omega$ tal que el rozamiento se anule.

$\rightarrow$ Queremos que $f(t) = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \alpha_0 \operatorname{sen}(\omega t) \left( \omega^2 - \frac{g}{2d} \right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{2d}}}$ Corresponde a que el ángulo $\alpha$ se mueve solidario a $\theta$.