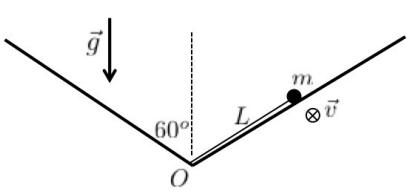
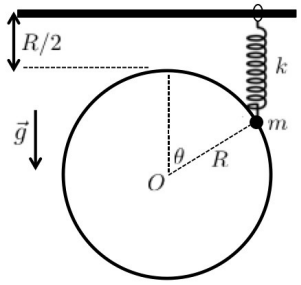
Física
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 2 Mecánica (FI2001-6, otoño 2017)
Profesores: Mario Riquelme, Astor Sandoval, y Cristobal Zenteno
Tiempo: 3 horas

Problema 1:
Una partícula de masa m se mueve sin roce por el interior de un cono invertido hueco, cuya generatriz forma con la vertical un ángulo de 60^o, como muestra la figura. La partícula está ligada por una cuerda ideal de largo L al vértice O del cono.
a) Determine la rapidez de la partícula si la magnitud de la tensión de la cuerda es mg. [2 puntos]
b) Dado que el momentum angular de la partícula (con respecto a O) se puede descomponer en una parte vertical y otra horizontal, diga cuál (o cuáles) de estas componentes se conserva. [2 puntos]
c) Suponga que la cuerda repentinamente se corta, escriba una ecuación que permita determinar la máxima altura que alcanza la partícula. [2 puntos]

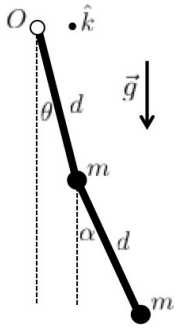


Problema 2:
Un anillo de masa m desliza en presencia de gravedad a lo largo de un aro de radio R y centrado en O. El anillo además está conectado a un eje horizontal mediante un resorte de constante k y largo natural $l_0 = R/2$, el que siempre se mantiene vertical. El punto O está a una distancia $3R/2$ del eje horizontal. Si $k = mg/R$, encuente:
a) La energía potencial del anillo en función de θ, y grafíquela.[2 puntos]
b) Los puntos de equilibrio y diga si son estables o inestables (se sugiere usar el gráfico de la parte a)). Encuentre $\theta(t)$ para el caso en que la partícula parte desde el punto de equilibrio inestable más alto. Asuma que el anillo se encuentra inicialmente en reposo. [2 puntos]
c) Si el anillo parte desde el reposo en $\theta = 0$, ¿dónde se vuelve a detener? Calcule el trabajo mecánico realizado por el resorte entre $\theta = 0$ y la posición en que el anillo vuelve a detenerse.[2 puntos]



Problema 3:
Un péndulo doble consiste en dos barritas sin masa de largo d, cada una con una partícula de masa m en su extremo inferior, en presencia de gravedad y conectadas según muestra la figura. El ángulo α que la barra inferior forma con la vertical está determinado por un motor (sin masa), tal que $\alpha = \alpha_0 \text{sen}(\omega t)$. En el límite $\alpha \ll 1$ y $\theta \ll 1$, muestre que:

a) El momentum angular con respecto a O de la masa de más abajo está dado por $2md^2(\dot{\theta} + \dot{\alpha})\hat{k}$. Además encuentre el momentum angular total del sistema. [2 puntos]
b) La ecuación de movimiento para θ corresponde a un oscilador forzado, e identifique el términos correspondiente al forzamiento. [2 puntos]
c) ¿Para qué frecuencia ω la ecuación de movimiento para θ deja de comportarse como un oscilador forzado, en el sentido que el términos correspondiente al forzamiento se anula?[2 puntos]



Aceleración en distintos sistemas de coordenadas:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{\text{esféricas}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\text{sen}(\theta)^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\text{sen}(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} + \frac{d(r^2\dot{\phi}\text{sen}(\theta)^2)/dt}{r\text{sen}(\theta)}\hat{\phi} \\
\vec{a}_{\text{cilíndricas}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
\vec{a}_{\text{intrínsecas}} &= \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}
\end{aligned}
$$